

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Esercizi di Teoria dei Sistemi

Autori

Giulio SPINOZZI

Paolo VALIGI

....

Coordinatore

Paolo VALIGI

Copyright



Questo testo è rilasciato nei termini della Licenza Creative Commons Attribuzione - Non Commerciale - Condividi allo stesso modo 2.5 versione italiana.

Ciò significa che tu, il lettore, puoi riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico quest'opera, e puoi modificare quest'opera, alle seguenti condizioni:

- **Attribuzione** Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.
- **Non commerciale** Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.
- **Condividi allo stesso modo** Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

Il riassunto dei termini di licenza (commons deed) è disponibile all'indirizzo: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/deed.it>, mentre la formulazione completa (legal code) è disponibile all'indirizzo: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/legalcode>.

Coordinatore

Paolo VALIGI

Autori

Giulio SPINOZZI

Paolo VALIGI

....

Il libro è scritto in forma collaborativa, nella convinzione che il contributo di molti autori renda il testo più interessante ed efficace. E ciò sia per il maggiore coinvolgimento degli studenti, sia perché in tal modo è possibile proporre una molteplicità di approcci, tra loro diversi ed originali, alla soluzione di tipici esercizi di esame.

La partecipazione al progetto è del tutto libera. Le persone interessate a contribuire con esercizi risolti o con commenti migliorativi possono scrivere a paolo.valigi@diei.unipg.it.

Versione del documento

Versione preliminare del 26 aprile 2011.

Indice

1	Esercizi di analisi di circuiti RLC	5
1.1	Circuito RLC	6
1.1.1	Testo esame del 11.02.2011	6
1.1.2	Soluzione	6
1.1.3	Il codice Matlab per generare le figure dei diagrammi asintotici e corretti	13
1.2	Circuito RLC	15
1.3	Circuito RLC	16
1.3.1	Presentazione del problema	16
1.3.2	Modello dinamico	16
1.3.3	Analisi del sistema	17
1.3.4	Risposta in frequenza	18
1.3.5	Conclusioni	21

Capitolo 1

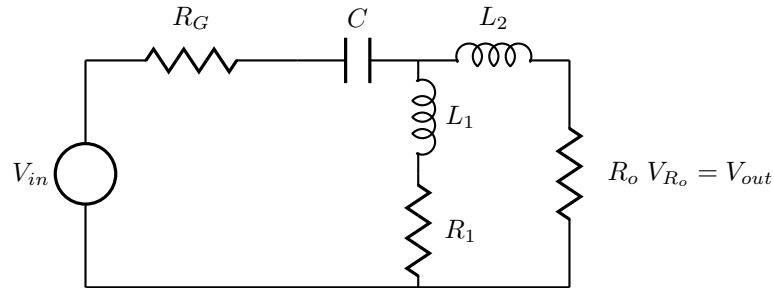
Esercizi di analisi di circuiti RLC

In questo capitolo vengono presentati esercizi risolti di analisi di circuiti a componenti passivi RLC.

1.1 Circuito RLC

1.1.1 Testo esame del 11.02.2011

Dato il seguente circuito elettrico, con $R_1 = \alpha$, e tutti gli altri parametri di valore unitario,



1. Determinare il modello dinamico nello spazio di stato, parametricamente rispetto al reale α ;
2. fissato $\alpha = 1$, determinare la risposta forzata per ingresso a gradino (nel dominio del tempo);
3. fissato $\alpha = 1$, tracciare i diagrammi di Bode del sistema e valutarne il margine di guadagno.

1.1.2 Soluzione

Modello dinamico

Il sistema, caratterizzato da tre componenti con memoria, può essere descritto da un modello dinamico con tre variabili di stato, ed in particolare dalla caduta di tensione ai capi del condensatore e dalla corrente lungo i due induttori:

$$x_1 = V_C \quad (1.1)$$

$$x_2 = i_{L_1} \quad (1.2)$$

$$x_3 = i_{L_2}, \quad (1.3)$$

cui corrispondono, tenendo conto delle equazioni costitutive di tali componenti, le equazioni differenziali:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} i_C \quad (1.4)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L_1} V_{L_1} \quad (1.5)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L_2} V_{L_2}. \quad (1.6)$$

Si tratta quindi di determinare i segnali a destra delle equazioni differenziali in funzione delle tre variabili di stato e del segnale di ingresso, dato dalla tensione erogata dal generatore: $u(t) = V_{in}(t)$.

Le equazioni di equilibrio di Kirchoff nel caso del circuito in esame sono relative a due maglie e ad un nodo:

$$u = V_{R_G} + V_C + V_{L_1} + V_{R_1} \quad (1.7)$$

$$V_{L_1} + V_{R_1} = V_{L_2} + V_{R_o} \quad (1.8)$$

$$i_C = i_{L_1} + i_{L_2}. \quad (1.9)$$

Risolvendo e tenendo conto del valore dei parametri (tutti unitari salvo $R_1 = \alpha$) si trova:

$$\begin{aligned} i_C &= i_{L_1} + i_{L_2} \\ &= x_2 + x_3. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Per la tensione ai capi dei due induttori si trova:

$$\begin{aligned} V_{L_1} &= u - V_{R_G} - V_C - V_{R_1} \\ &= u - i_C R_G - V_C - i_{L_1} R_1 \\ &= u - (i_{L_1} + i_{L_2}) R_G - V_C - i_{L_1} R_1 \\ &= u - (x_2 + x_3) - x_1 - \alpha x_2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} V_{L_2} &= V_{L_1} + V_{R_1} - V_{R_o} \\ &= u - V_{R_G} - V_C - V_{R_1} + V_{R_1} - V_{R_o} \\ &= u - x_1 - x_2 - 2x_3. \end{aligned} \quad (1.12)$$

L'equazione di uscita infine è semplicemente

$$\begin{aligned} y &= V_{R_o} \\ &= x_3. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Il modello differenziale quindi è dato da:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_3 \quad (1.14)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - (1 + \alpha)x_2 - x_3 + u \quad (1.15)$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 - x_2 - 2x_3 + u \quad (1.16)$$

$$y = x_3. \quad (1.17)$$

In forma matriciale il sistema è descritto dalle due equazioni:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -(1 + \alpha) & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.18)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] x. \quad (1.19)$$

Risposta forzata per ingresso a gradino, fissato $\alpha = 1$

Si procede con il calcolo della funzione di trasferimento e poi con quello della risposta indiciale nel dominio di Laplace e la successiva antitrasformazione per espansione in frazioni parziali.

Per il calcolo della funzione di trasferimento si può procedere con la formula classica:

$$W(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{c \operatorname{adj}(sI - A) b}{\det(sI - A)}. \quad (1.20)$$

Per il numeratore si tratta di calcolare il prodotto:

$$c \operatorname{adj}(sI - A) b = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & e_{3,2} & e_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

tenendo conto del fatto che si può evitare il calcolo degli elementi indicati con un asterisco “*” nella matrice aggiunta, in considerazione dei valori nulli assunti dagli elementi in posizione (1, 1) ed (1, 2) della matrice c ed in posizione (1, 1) della matrice b . Gli elementi significativi $e_{3,2}$ ed $e_{3,3}$ si ottengono calcolando i complementi algebrici degli elementi in posizione (2, 3) e (3, 3) nella matrice $(sI - A)$ (ricordando che $\alpha = 1$). Si trova facilmente:

$$e_{3,2} = -(s + 1), \quad e_{3,3} = s^2 + 2s + 1, \quad (1.22)$$

e quindi il numeratore della funzione di trasferimento vale:

$$c \operatorname{adj}(sI - A) b = s^2 + s = s(s + 1). \quad (1.23)$$

Per il denominatore si trova facilmente¹:

$$\det(sI - A) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = (s + 1)^2(s + 2), \quad (1.24)$$

e quindi la funzione di trasferimento, operando la semplificazione del fattore comune numeratore/denominatore, è pari a:

$$W(s) = \frac{s(s + 1)}{(s + 1)^2(s + 2)} = \frac{s}{(s + 1)(s + 2)}. \quad (1.25)$$

La risposta indiciale nel dominio di Laplace, ricordando che la funzione gradino unitario ha trasformata pari a $1/s$, vale:

$$Y_{gra}(s) = W(s) \frac{1}{s} = \frac{s}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}. \quad (1.26)$$

Per il calcolo della risposta indiciale nel dominio del tempo si procede con l'espansione in frazioni parziali e la successiva antitrasformazione dei termini elementari:

$$Y_{gra}(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s + 2} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}, \quad (1.27)$$

avendo calcolato i residui come segue:

$$\begin{aligned} A_1 &= (s + 1)Y_{gra}(s)|_{s=-1} = \frac{1}{(s + 2)}|_{s=-1} = 1 \\ A_2 &= (s + 2)Y_{gra}(s)|_{s=-2} = \frac{1}{(s + 1)}|_{s=-2} = -1. \end{aligned}$$

¹la scomposizione del polinomio è fornita in aula con il testo del compito scritto

La risposta al gradino nel dominio del tempo vale quindi:

$$y_{gra}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \quad (1.28)$$

e quindi:

$$y_{gra}(t) = e^{-t} - e^{-2t}. \quad (1.29)$$

Si noti come il gradino applicato in ingresso non venga trasferito in uscita per la presenza dello zero nell'origine, che blocca in passaggio attraverso il sistema dei segnali con polo corrispondente, e cioè di tutti i segnali a gradino, indipendentemente dalla loro ampiezza.

Tracciamento dei diagrammi di Bode e valutazione del margine di guadagno, fissato $\alpha = 1$

Per il tracciamento dei diagrammi di Bode si parte dalla funzione di trasferimento, già calcolata al punto precedente, riscrivendola nella forma di costanti di tempo e guadagno:

$$W(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2} \frac{s}{(1+s)(1+s/2)}. \quad (1.30)$$

Si procede tracciando i diagrammi asintotici dei moduli per il termine di guadagno (pari a $g = 1/2$), per i termini associati ai due poli e per il termine associato allo zero nell'origine. Utilizzando il codice Matlab riportato alla fine dell'esercizio ed in appendice (per la funzione `BodeAsintotico()`), si trovano, nell'ordine, i seguenti diagrammi.

Il guadagno è un termine costante pari a $20 * \log_{10}(1/2) = 6dB$:

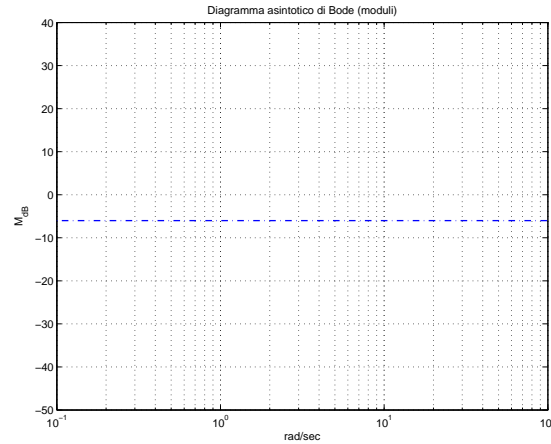
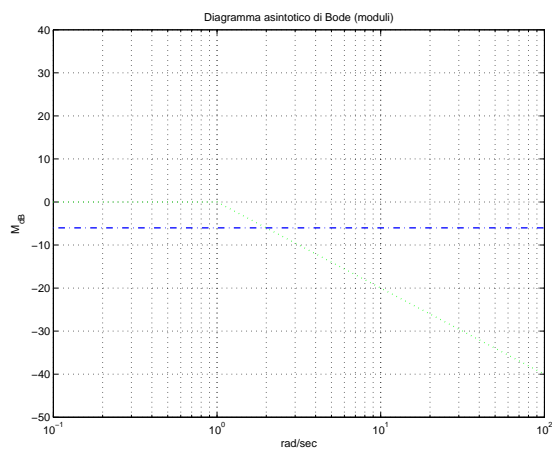
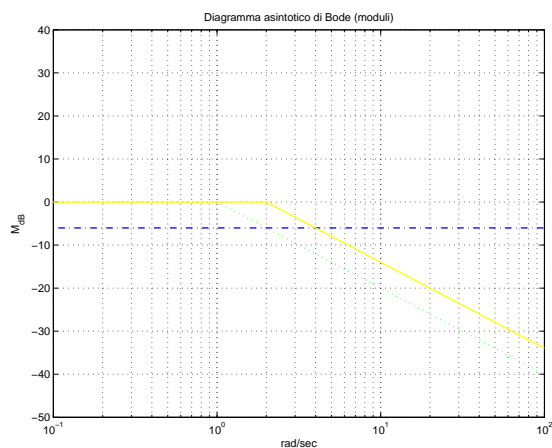


Figura 1.1: Esercizio 1.1: diagramma di Bode asintotico del termine di guadagno

Il contributo del primo polo, $p_1 = -1$, è nullo fino ad una pulsazione pari a 1 rad/sec (Fig. 1.2). Il contributo del secondo polo, $p_2 = -2$, è nullo fino ad una pulsazione pari a 2 rad/sec (Fig. 1.3).

Infine, il contributo dello zero nell'origine è una retta con pendenza costante su tutto lo spettro e pari a 20 dB/dec (Fig. 1.4).

Figura 1.2: Esercizio 1.1: diagramma di Bode asintotico del polo $p_1 = -1$.Figura 1.3: Esercizio 1.1: diagramma di Bode asintotico del polo $p_2 = -2$.

Sommando tutti i singoli diagrammi asintotici, si ottiene il diagramma asintotico complessivo (Fig. 1.5), che si trasforma facilmente nel diagramma esatto tenendo conto delle correzioni da apportare in corrispondenza dei punti di rottura associati a ciascun polo (Fig. 1.6).

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi, si riporta solo il diagramma corretto, ricavato direttamente da Matlab (Fig. 1.7).

In merito al margine di guadagno, poiché il sistema ha due soli poli e non ha zeri a fase non minima, la fase non raggiungerà mai il valore di -180 (si veda anche il diagramma in fig. 1.7), e quindi il margine di guadagno è infinito.

◇

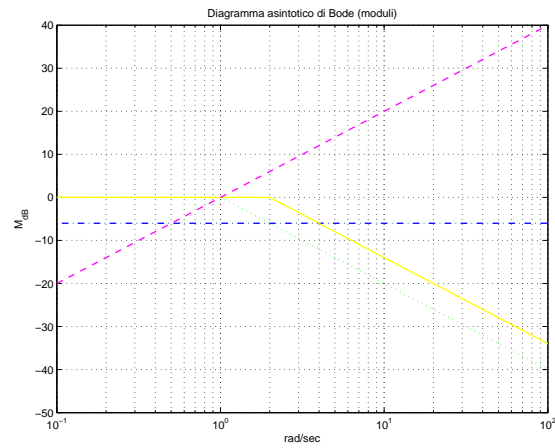


Figura 1.4: Esercizio 1.1: diagramma di Bode asintotico dello zero nell'origine $z_1 = 0$.

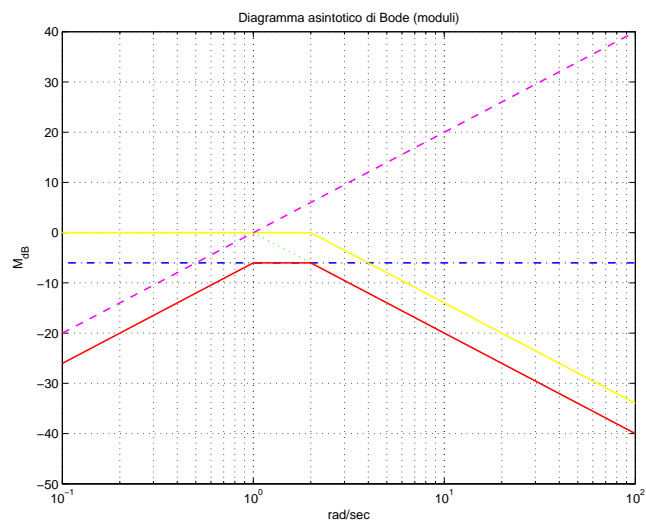


Figura 1.5: Esercizio 1.1: diagramma di Bode asintotico (moduli)

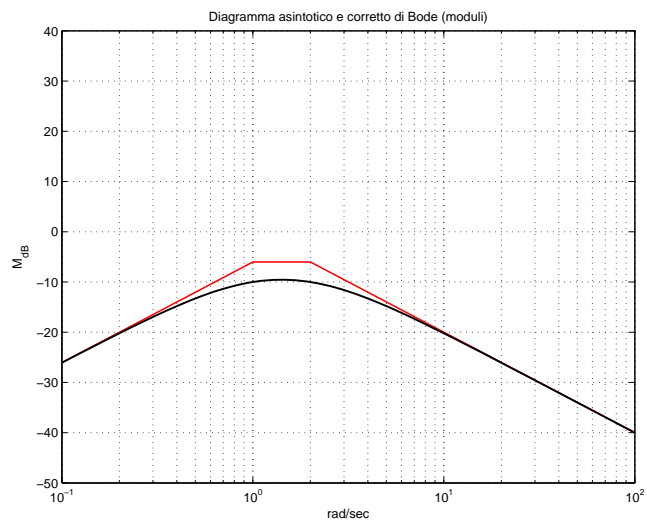


Figura 1.6: Esercizio 1.1: diagramma di Bode dei moduli corretto

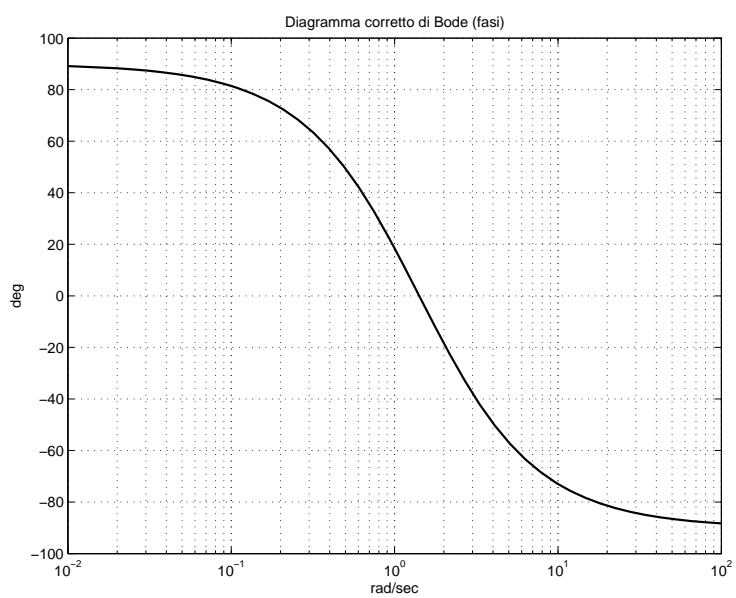


Figura 1.7: Esercizio 1.1: diagramma di Bode delle fasi corretto

1.1.3 Il codice Matlab per generare le figure dei diagrammi asintotici e corretti

```
%  
% Diagramma asintotico dei moduli della funzione  
%  $w(s) = s/(s+1)(s+2)$   
%  
  
clear all;  
close all;  
  
k = 1;  
z1 = 0;  
  
p1 = -1;  
p2 = -2;  
  
g = k/(-p1*(-p2));  
wi = 0.1;  
wf = 100;  
  
lw=1.2;  
filename='PV_RLC100_bode';  
exttype = 'psc2';  
  
figure(1)  
semilogx(wi,-50,'k',wf,40,'k')  
title('Diagramma asintotico di Bode (moduli)');  
xlabel('rad/sec');  
ylabel('M_{dB}');  
grid on;  
hold on;  
  
bp_g = BodeAsintotico('guadagno', g, wi, wf);  
semilogx(bp_g(1,:),bp_g(2,:),'b-','LineWidth',lw)  
% Salva la figura per il libro di esercizi  
saveas(gcf,strcat(filename,'_g'),exttype);  
  
bp_p1 = BodeAsintotico('polo',p1,wi,wf);  
semilogx(bp_p1(1,:),bp_p1(2,:),'g:','LineWidth',lw)  
saveas(gcf,strcat(filename,'_p1'),exttype);  
  
bp_p2=BodeAsintotico('polo',p2,wi,wf);  
semilogx(bp_p2(1,:),bp_p2(2,:),'y-','LineWidth',lw)  
saveas(gcf,strcat(filename,'_p2'),exttype);
```

```

bp_z1=BodeAsintotico('zero',z1,wi,wf);
semilogx(bp_z1(1,:),bp_z1(2,:), 'm--', 'LineWidth',lw)
saveas(gcf,strcat(filename,'_z1'),exttpe);

gdb = 20*log10(g);
om_as = [wi, abs(p1), abs(p2), wf];
mod_as = [gdb+20*log10(wi), gdb, gdb, gdb-20*log10(wf/abs(p2))];
semilogx(om_as,mod_as,'r', 'LineWidth',lw)
saveas(gcf,strcat(filename,'_asintotico'),exttpe);

figure(2)
semilogx(wi,-50,'k',wf,40,'k')
title('Diagramma asintotico e corretto di Bode (moduli)');
xlabel('rad/sec');
ylabel('M_{dB}');
grid on;
hold on;

gdb = 20*log10(g);
om_as = [wi, abs(p1), abs(p2), wf];
mod_as = [gdb+20*log10(wi), gdb, gdb, gdb-20*log10(wf/abs(p2))];
semilogx(om_as,mod_as,'r-', 'LineWidth',lw)
%saveas(gcf,strcat(filename,'_asintotico'),exttpe);

sys = tf(k*poly(z1),poly([p1, p2]));
[modulo,fase,omega] = bode(sys,logspace(log10(wi), log10(wf)));
mdb = 20*log10(squeeze(modulo));
semilogx(omega,mdb,'k', 'LineWidth',1.5)
saveas(gcf,strcat(filename,'_corretto'),exttpe);

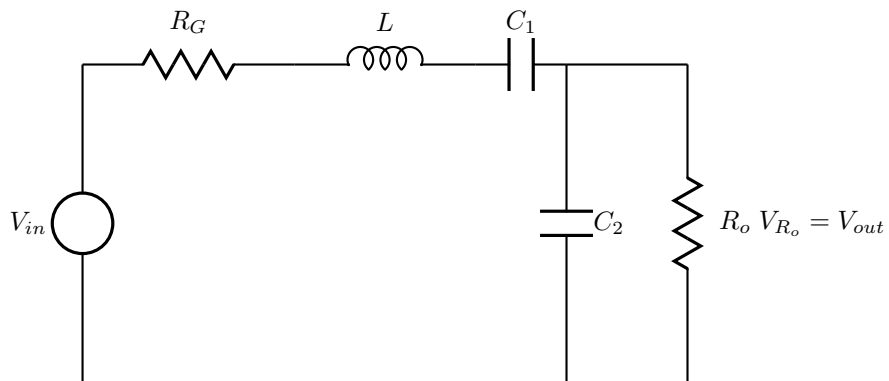
figure(3)
[modulo,fase,omega] = bode(sys);
fase = squeeze(fase);
semilogx(omega,fase,'k', 'LineWidth',1.5)
title('Diagramma corretto di Bode (fasi)');
xlabel('rad/sec');
ylabel('deg');
grid on;
saveas(gcf,strcat(filename,'_fasi'),exttpe);

```

1.2 Circuito RLC

2

Dato il seguente circuito elettrico, con $R_o = 1/\alpha$, e tutti gli altri parametri di valore unitario,



1. Determinare il modello dinamico nello spazio di stato, parametricamente rispetto al reale α ;
2. fissato $\alpha = 2$, tracciare i diagrammi di Bode del sistema;
3. fissato $\alpha = 2$, determinare l'ampiezza della risposta in uscita, a regime, per ingresso $u(t) = \sin(1t)$.

◇

1.3 Circuito RLC

1.3.1 Presentazione del problema

Si vuole determinare il modello dinamico del sistema indicato in figura 1.8, valutare tutti i modi naturali, calcolare la funzione di trasferimento ed analizzare la risposta in frequenza, conducendo un numero adeguato di simulazioni del comportamento ingresso-uscita, per ingresso sinusoidale con pulsazioni opportune.

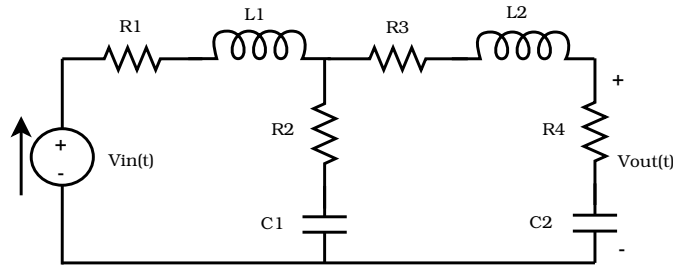


Figura 1.8: Circuito RLC

Parametro	Valore
Resistenza R_1	$1\text{ K}\Omega$
Resistenza R_2	$120\text{ K}\Omega$
Resistenza R_3	$8\text{ K}\Omega$
Resistenza R_4	$250\text{ K}\Omega$
Induttanza L_1	$15 * 10^{-3}\text{ H}$
Induttanza L_2	$22 * 10^{-3}\text{ H}$
Capacità C_1	$15 * 10^{-9}\text{ F}$
Capacità C_2	$25 * 10^{-9}\text{ F}$

Tabella 1: I parametri del circuito

1.3.2 Modello dinamico

Il modello dinamico di un circuito elettrico a componenti passivi può essere determinato a partire dalle leggi fisiche che ne regolano il comportamento, ed in particolare sulla base delle equazioni costitutive dei componenti e delle equazioni di equilibrio delle tensioni e delle correnti (leggi di Kirchhoff). Considerando il circuito in figura 1, per induttori e condensatori valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{di_L}{dt} L = v_L \quad \frac{dv_C}{dt} C = i_C$$

Le leggi di Kirchhoff per le correnti e le maglie sono invece:

$$\begin{aligned} i_{C_1} &= i_{L_1} - i_{L_2} && \text{inoltre} && i_{C_2} &= i_{L_2} \\ v_{L_1} &= v_{in} - v_{R_1} - v_{R_2} - v_{C_1} \\ v_{L_2} &= v_{R_2} + v_{C_1} - v_{R_3} - v_{R_4} - v_{C_2} \end{aligned}$$

Le variabili di stato sono date dalle correnti lungo tutte le induttanze e dalle tensioni ai capi dei condensatori. Nel caso in esame si hanno quindi quattro variabili di stato:

$$x_1 = i_{L_1} \quad x_2 = v_{C_1} \quad x_3 = i_{L_2} \quad x_4 = v_{C_2}$$

Le equazioni costitutive di induttori e condensatori, riscritte in termini di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{L_1} v_{L_1} = \frac{1}{L_1} [u - R_1 x_1 - R_2 (x_1 - x_3) - x_2] \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C_1} i_{C_1} = \frac{1}{C_1} [x_1 - x_3] \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L_2} v_{L_2} = \frac{1}{L_2} [R_2 x_1 - R_2 x_3 + x_2 - R_3 x_3 - R_4 x_3 - x_4] \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{C_2} i_{C_2} = \frac{1}{C_2} [x_3] \end{aligned}$$

Manca l'equazione d'uscita, che è:

$$y = R_4 x_3 + x_4$$

E' possibile ora scrivere le matrici A , b e c che descrivono completamente il sistema in esame:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R_1 - R_2}{L_1} & \frac{-1}{L_1} & \frac{R_2}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & \frac{-1}{C_1} & 0 \\ \frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} & \frac{-R_2 - R_3 - R_4}{L_2} & \frac{-1}{L_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = [0 \quad 0 \quad R_4 \quad 1]$$

1.3.3 Analisi del sistema

Ricavato il modello dinamico nello spazio di stato del circuito RLC, si può ora calcolare la funzione di trasferimento, effettuare l'analisi modale, simulare il suo comportamento ingresso-uscita, analizzare quindi accuratamente la risposta armonica richiesta. Tutto ciò verrà appunto eseguito con l'ausilio di un potente software matematico, MatLab.

Per prima cosa si devono inserire nel file .m (in allegato) i dati del sistema che vengono forniti dal testo, cioè i valori numerici di resistenze, condensatori e induttori; lasciando comunque il modello in forma parametrica. Fatto questo, inserite anche le matrici, si crea l'oggetto sistema, che MatLab poi gestirà autonomamente, con l'istruzione `sys=ss(A,b,c,d)`. La matrice `d`, non presente nel modello verrà sostituita da zero.

```
R1=1*10^(3); R2=12*10^(4); R3=8*10^(3); R4=25*10^(4);
L1=15*10^(-3); L2=22*10^(-3);
C1=15*10^(-9); C2=25*10^(-9);
```

```
A=[(-R1-R2)/L1, (-1)/L1, R2/L1, 0;
1/C1, 0, (-1)/C1, 0;
R2/L2, 1/L2, (-R2-R3-R4)/L2, (-1)/L2;
0, 0, 1/C2, 0];
```

```
b=[1/L1; 0; 0; 0; 0];
```

```
c=[0, 0, R4, 1];
```

```
sys=ss(A,b,c,0);
```

In questo modo nel workspace di MatLab sono presenti tutte le variabili: A,b,c..., con i rispettivi valori, già calcolati dal software. Queste matrici non verranno riportate per non appesantire la forma, avendo valori molto grandi, anche perché i calcoli sono completamente in forma parametrica, non è necessario quindi avere scritti valori difficili anche da leggere.

Passando ora al calcolo della matrice di trasferimento, con l'istruzione:

```
systf=tf(sys)
```

memorizzandola nella variabile `systf`, risulta essere:

$$W(s) = \frac{9.091e013s^2+6.505e016s+8.081e018}{s^4+2.525e007s^3+9.497e013s^2+6.699e016s+8.081e018}$$

Per quanto concerne l'analisi modale è sufficiente calcolare gli autovalori del sistema. Per fare ciò si fa uso della funzione di MatLab `eig(sys)` che appunto trova gli autovalori del circuito in esame, memorizzandoli poi in una variabile chiamata `autvals`, di cui si può fare riferimento nel solito e valido workspace.

```
autvals =
-2.0649e+007
-4.5985e+006
-551.03
-154.44
```

I quattro autovalori sono reali e negativi, non nulli. In questo caso, avendo quest'ultimi molteplicità unitaria, non è necessario ricavare il polinomio minimo, che infatti coincide con il caratteristico.

I modi (funzioni del tempo) presenti nell'esponenziale di matrice, sono del tipo:

$$e^{\lambda t}$$

dove λ è l'autovalore.

Ne deriva che i modi naturali sono delle esponenziali decrescenti (esponente negativo). Si dice in questo caso che i modi sono convergenti (caratterizzazione rispetto alla convergenza).

1.3.4 Risposta in frequenza

Si vuole ora applicare in ingresso al sistema un segnale sinusoidale, valutando la risposta armonica, cioè la funzione di trasferimento $W(s)$, in $s = j\omega$. Iniziando

con il valutare i poli del sistema, MatLab esegue questo semplice calcolo con l'istruzione `pole(sys)`.

Si noti che i poli sono reali negativi, non nulli, ed uguali agli autovalori. Questo si è verificato perché il sistema è sia raggiungibile sia osservabile (come è facile verificare in MatLab, calcolando i determinanti delle matrici R e O), quindi non sono possibili cancellazioni polo/zero. Essendo i poli tutti a parte reale negativa, la risposta armonica è pari al rapporto tra il modulo del segnale in ingresso con quello dell'uscita, mentre la fase della risposta armonica è pari allo sfasamento tra il segnale di ingresso e il segnale d'uscita. Questo per valori di pulsazione $\omega \in [0, +\infty[$ dell'ingresso. In particolare: $y(t) = y_t(t) + y_p(t)$, dove la risposta transitoria $y_t(t)$ tende a zero, a causa dei poli a parte reale negativa, il sistema è esternamente stabile (BIBO); ne segue che dopo poco tempo $y(t) = y_p(t)$, cioè:

$$y(t) = M_\omega \sin(\omega t + \phi_\omega), \quad \text{dove} \quad M_\omega := |W(j\omega)| \quad \phi_\omega = \angle W(j\omega)$$

Alla luce di questo, per determinare $W(j\omega)$ è sufficiente applicare in ingresso al sistema un segnale sinusoidale, aspettare che l'uscita vada a regime (basta poco, le costanti di tempo infatti in questo caso sono piccolissime, ricordando che $\tau = \frac{1}{\lambda}$), e quindi determinare il rapporto tra l'ampiezza del segnale in uscita e quella del segnale in ingresso, nonché lo sfasamento tra i due. Ripetendo questa operazione con diversi segnali sinusoidali in ingresso, caratterizzati da diversi valori della pulsazione, si risale all'andamento del modulo e della fase della risposta armonica nel campo delle pulsazioni di interesse.

Mettendo in ingresso al sistema $u(t) = \sin(\omega t)$ il rapporto dei moduli dei segnali uscita-ingresso, sarà pari all'ampiezza in uscita (infatti l'ampiezza del segnale $u(t)$ è pari a 1), ne segue che basta misurare l'uscita del sistema per ricavare la risposta armonica.

In MatLab:

```
w=0;
for i=1:1000,
H=(9.091e013*(j*w)^2+6.505e016*(j*w)+8.081e018)/
((j*w)^4+2.525e007*(j*w)^3+9.497e013*(j*w)^2+6.699e016*(j*w)+8.081e018);
vecH(i)=H;
vecM(i)=abs(vecH(i));
vecph(i)=angle(vecH(i));
w=w+100000;
end
vecw=0:100000:99900000;
```

Inizializzando la variabile delle pulsazioni ($\omega = 0$), si apre un ciclo `for` dove la funzione di trasferimento (H) viene messa in forma ($s = j\omega$), calcolando cosimodulo e fase per la rispettiva pulsazione, e memorizzando poi il tutto in array, utili poi per creare i grafici di Bode.

Si scelgono 1000 pulsazioni, sufficienti per ottenere una risposta armonica soddisfacente.

Ovviamente MatLab con la sua funzione predefinita `bode(sys)` è in grado di ottenere un risultato maggiormente accurato, come si vede dal confronto con i

grafici. Questo probabilmente è dovuto a molti fattori, l'approssimazione fatta con la risposta transitoria, un numero non elevatissimo di campioni, ed infine un algoritmo sicuramente non precisissimo. Vengono riportati di seguito i diagrammi sopra citati:

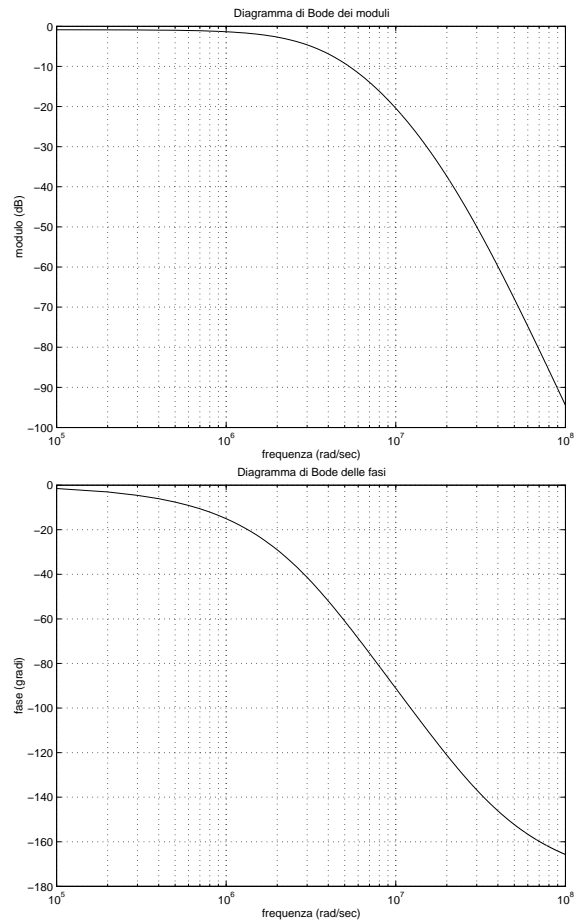


Figura 1.9: Diagrammi di Bode sperimentali, modulo e fase

In figura 2, come detto, sono presenti i diagrammi di Bode che risultano dopo 1000 simulazioni del comportamento ingresso uscita (diagrammi sperimentali), a sinistra quello dei moduli e a destra quello delle fasi.

Sotto invece, figura 3, i diagrammi di Bode che calcola MatLab con la sua funzione predefinita, che si ricorda essere `bode(sys)`.

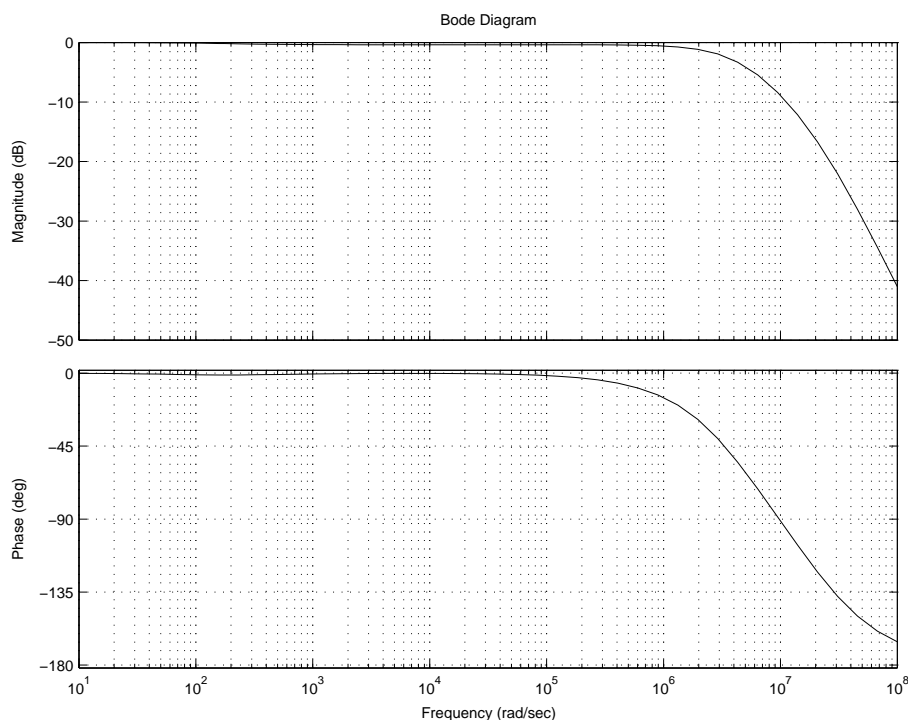


Figura 1.10: Diagrammi di Bode Matlab

1.3.5 Conclusioni

E' importante sottolineare che il procedimento sperimentale per la determinazione della risposta armonica è dovuto al fatto che i poli del sistema sono tutti negativi. Questo implica stabilità BIBO, ma soprattutto che la risposta transitoria, converga a zero, con una certa velocità, abbastanza elevata in questo caso. Si ricordi infatti che esistono altre procedure per trovare la risposta armonica, con l'utilizzo di segnali in ingresso diversi da quello in esame, come l'impulso di Dirac o il gradino.

Sono ben visibili dai grafici alcuni risultati e proprietà del sistema, soprattutto ricordando l'azione filtrante di circuiti di questo tipo. Si nota subito dal diagramma dei moduli di Bode un'ampia banda passante (scarso tempo di salita), dovuta alle piccole costanti di tempo del circuito RLC, il comportamento di filtro passa-basso. Fino ad un range di frequenze dell'ordine di circa $2.2 \cdot 10^6 \text{ rad/sec}$, cioè fino alla banda a 3 dB , dove si ha una riduzione del segnale del 30%, il segnale passa quasi inalterato, dopo si ha una forte distorsione dello stesso.

◇

Indice analitico

Circuiti RLC, 5

Esame del 01.06.2010-A, 15

RLC Esame del 2011.02.11, 6