

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Ingegneria Informatica ed Elettronica



Tesina d'esame per il corso di
Robotica Industriale
Docente: Ing. Antonio Ficola
A.A. 2010/2011

Il Robot SCARA

Giulio Spinozzi (244191)

Andrea Prioreshi (237025)

Indice

Introduzione	3
Cinematica Diretta	3
<i>Posizione ed Orientamento</i>	4
<i>Composizione di matrici di rotazione e trasformazioni omogenee</i>	5
<i>Cinematica diretta nel caso di un manipolatore</i>	6
<i>Convenzione di Denavit-Hartenberg</i>	6
<i>Cinematica Diretta: lo SCARA</i>	7
Cinematica Inversa	8
<i>Cinematica Inversa: lo SCARA</i>	9
Cinematica Differenziale: Jacobiano Geometrico	10
<i>Jacobiano: il caso dello SCARA</i>	10
<i>Singularità cinematiche dello SCARA</i>	11
Dinamica	12
<i>Dinamica dello SCARA: formulazione di Lagrange</i>	12
<i>Dinamica del Manipolatore planare a due bracci</i>	12
<i>Dinamica totale dello SCARA</i>	15
<i>Dinamica: formulazione di Eulero-Newton</i>	17
<i>Equazioni ricorsive del moto dei manipolatori</i>	17
<i>Algoritmo di calcolo</i>	20
<i>Confronto formulazione Lagrange con formulazione Newton-Eulero</i>	20
Applicazione MATLAB: Simulazione Pick and Place SCARA	21
<i>Definizione di un oggetto ROBOT mediante il Robotics Toolbox</i>	21
<i>Risultati della simulazione</i>	22
Applicazioni	25
Appendice: Il codice MATLAB per lo SCARA	26
Bibliografia	30

Introduzione

Il robot SCARA è un manipolatore di semplice struttura, molto diffuso nelle operazioni di montaggio. I suoi assi dei giunti sono verticali. La sigla SCARA deriva dalle parole inglesi *Selective Compliance Assembly Robot Arm* (robot di montaggio a cedevolezza selettiva). Il robot è a cedevolezza selettiva perché la pinza, se forzata, si può muovere leggermente nel piano orizzontale ma non in quello verticale. Questo fattore dipende dalle caratteristiche strutturali del robot e dall'elasticità torsionale degli alberi di trasmissione nonché dei riduttori di velocità. Un certo grado di cedevolezza è appositamente inserito nel robot per compensare *automaticamente* alcuni errori di posizionamento del robot stesso. Il robot SCARA da un punto di vista costruttivo è formato da due membri rigidi (detti *link*) collegati tra di loro da accoppiamenti rotoidali per effettuare i movimenti nel piano $x-y$ e da un terzo elemento collegato mediante accoppiamento prismatico per effettuare i movimenti verticali (fig. 1). Un ulteriore accoppiamento rotoidale è talvolta presente per consentire una rotazione della pinza attorno al suo asse, che altrimenti durante il moto assumerebbe un orientamento dipendente dalla posizione dei primi due membri (§6).



Figura 1: Epson Scara G3 (§3)

Cinematica Diretta

In questa sezione verrà fornito un metodo costruttivo per caratterizzare la posizione del punto (organo) terminale (end effector) di un manipolatore in base alla posizione relativa di ogni segmento rispetto al precedente, ovvero, in altri termini, in base alla posizione di ogni giunto.

Un manipolatore meccanico consiste in una sequenza di segmenti rigidi chiamati *link*, connessi da giunti prismatici o di rotazione (rotoidali), dove ogni coppia giunto-link, rappresenta un grado di libertà.

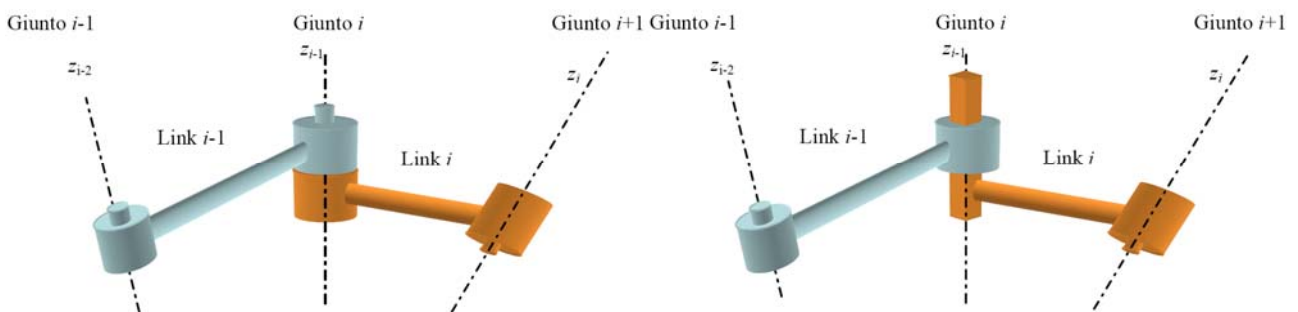


Figura 2: Giunto Rotoidale (sinistra) e Giunto Prismatico(destra)

Un estremo della catena è vincolato a una base; l'altro è connesso a un organo terminale.

Per eseguire un'operazione è necessario posizionare ed orientare l'organo terminale agendo sui gradi di mobilità, ciascuno caratterizzato da una variabile di giunto.

Il problema della **cinematica diretta** consiste nel determinare la posizione e l'orientamento dell'organo terminale e di tutti i bracci del manipolatore in funzione dei gradi di mobilità (variabili di giunto) (§4).

Posizione ed Orientamento

Un corpo rigido è caratterizzato completamente dalla **posizione** e **orientamento** di una terna ad esso solidale. Il problema si riduce a quello di determinare l'orientamento e la posizione di una terna cartesiana solidale al un corpo rigido, rispetto ad un'altra terna di riferimento.

La terna solidale al corpo si dice *terna solidale* o *locale* o *terna mobile*; la terna di riferimento si può chiamare, per semplicità, *terna fissa*.

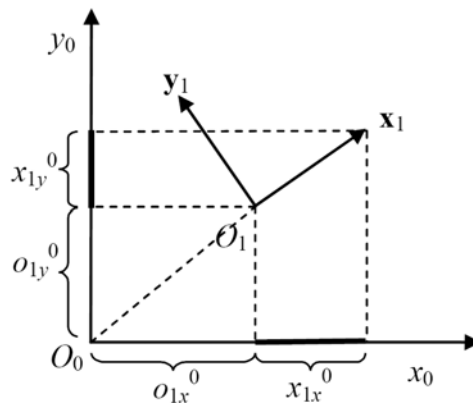


Figura 3: Posizione di O_1 rispetto a O_0

Per quanto riguarda la posizione (fig. 3) del punto O_1 rispetto alla terna (O_0, x_0, y_0, z_0) , rappresentata nella terna 0 è descritta dal vettore:

$$O_1^0 = o_{1x}^0 \mathbf{x}_0^0 + o_{1y}^0 \mathbf{y}_0^0 + o_{1z}^0 \mathbf{z}_0^0 \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \text{ versori})^1$$

dove $o_{1x}^0, o_{1y}^0, o_{1z}^0$ sono le componenti del vettore O_1 (e coordinate) sugli assi della terna di riferimento 0, denotato O_1^0 .

Per l'orientamento della terna mobile rispetto a quella fissa si possono rappresentare i versori della terna mobile nella terna fissa medesima, ottenendo:

$$\mathbf{x}_1^0 = x_{1x}^0 \mathbf{x}_0^0 + x_{1y}^0 \mathbf{y}_0^0 + x_{1z}^0 \mathbf{z}_0^0$$

$$\mathbf{y}_1^0 = y_{1x}^0 \mathbf{x}_0^0 + y_{1y}^0 \mathbf{y}_0^0 + y_{1z}^0 \mathbf{z}_0^0$$

$$\mathbf{z}_1^0 = z_{1x}^0 \mathbf{x}_0^0 + z_{1y}^0 \mathbf{y}_0^0 + z_{1z}^0 \mathbf{z}_0^0$$

dove le componenti sono la lunghezza delle proiezioni dei versori sugli assi della terna (O_0, x_0, y_0, z_0) . Visto che poi i versori hanno per definizione modulo unitario, ne segue che tali componenti sono i coseni direttori degli assi della terna mobile rispetto a quella fissa. In altri termini, la matrice orto-normale dei coseni direttori fra gli assi di due terne si dice **matrice di rotazione (R)**. Ad esempio la matrice R dei versori della terna mobile rispetto alla fissa:

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^0 & \mathbf{y}_1^0 & \mathbf{z}_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^0 & \mathbf{y}_0^0 & \mathbf{z}_0^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1x}^0 & y_{1x}^0 & z_{1x}^0 \\ x_{1y}^0 & y_{1y}^0 & z_{1y}^0 \\ x_{1z}^0 & y_{1z}^0 & z_{1z}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{0T} \mathbf{x}_0^0 & \mathbf{y}_1^{0T} \mathbf{x}_0^0 & \mathbf{z}_1^{0T} \mathbf{x}_0^0 \\ \mathbf{x}_1^{0T} \mathbf{y}_0^0 & \mathbf{y}_1^{0T} \mathbf{y}_0^0 & \mathbf{z}_1^{0T} \mathbf{y}_0^0 \\ \mathbf{x}_1^{0T} \mathbf{z}_0^0 & \mathbf{y}_1^{0T} \mathbf{z}_0^0 & \mathbf{z}_1^{0T} \mathbf{z}_0^0 \end{bmatrix}^2$$

Alcune proprietà fondamentali della matrice di rotazione:

- I vettori colonna della matrice \mathbf{R} sono fra loro ortogonali e hanno modulo unitario qualunque sia il sistema di riferimento
- La matrice è orto-normale, $\mathbf{R}_1^{0T} \mathbf{R}_1^0 = \mathbf{I}$

¹ In grassetto le grandezze vettoriali.

² Il prodotto scalare è definito come: $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\angle ab)$. Inoltre il prodotto scalare di due versori è il coseno direttore dell'asse di uno rispetto all'asse dell'altro.

- L'inversa di \mathbf{R} coincide con la sua trasposta.
- Se le terne 0 e 1 sono entrambe levogire o entrambe destrorse, allora $\det(\mathbf{R})=1$ (§4).

Composizione di matrici di rotazione e trasformazioni omogenee

Date tre terne aventi la stessa origine: $(0, x_0, y_0, z_0)$, $(0, x_1, y_1, z_1)$ e $(0, x_2, y_2, z_2)$, sia \mathbf{p} un vettore e siano $\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2$ le sue rappresentazioni nelle tre terne e siano $\mathbf{R}_1^0, \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^0$ le matrici di rotazione fra le varie terne.

Si ha:

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{p}^2 \quad \mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1 \quad \mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}^2$$

pertanto:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_1^0 (\mathbf{R}_2^1 \mathbf{p}^2) = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}^2 \Rightarrow \mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1$$

La matrice di trasformazione dalla terna 2 alla terna 0 (\mathbf{R}_2^0) può essere ottenuta a partire dalle rotazioni precedenti.

Può essere comodo utilizzare una notazione che comprenda sia la rotazione che la traslazione (roto-traslazione) rispetto a due terne, in questo caso sia \mathbf{P} un punto (vettore) le cui coordinate nella terna (O_0, x_0, y_0, z_0) sono \mathbf{p}_0^0 .

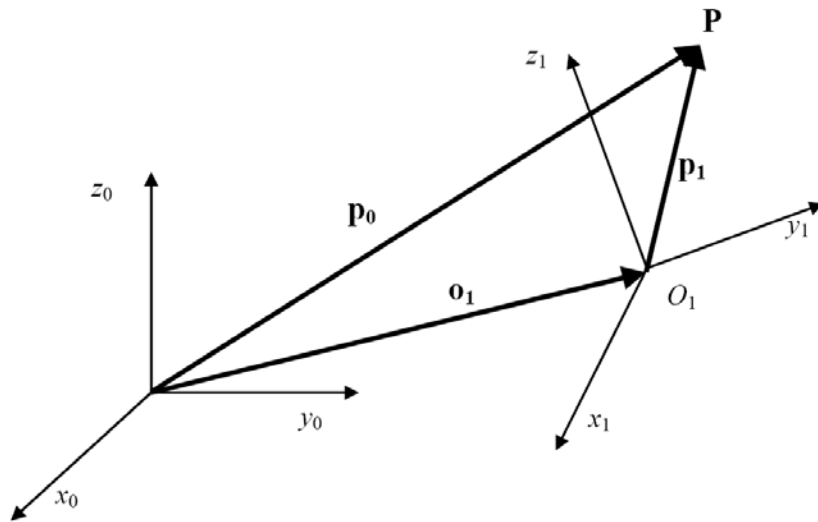


Figura 4: Trasformazioni Omogenee

Sia (O_1, x_1, y_1, z_1) un'altra terna e sia \mathbf{o}_1^0 il vettore che ne rappresenta la posizione, espresso nella terna fissa. In base a alla fig. 4 si ha:

$$\mathbf{p}_0^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{p}_1^0 \quad \mathbf{p}_1^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}_1^1$$

da cui:

$$\mathbf{p}_0^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}_1^1$$

Si definiscono le seguenti rappresentazioni dei vettori (coordinate omogenee):

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_0^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_1^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e la seguente matrice di **trasformazione omogenea**:

$$\mathbf{A}_1^0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right] \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}$$

Ne segue che:

$$\tilde{\mathbf{p}}_0^0 = \mathbf{A}_1^0 \tilde{\mathbf{p}}_1^1$$

Nel caso generale di più terne, la successione di trasformazioni (§4):

$$\tilde{\mathbf{p}}_0^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \dots \mathbf{A}_n^{n-1} \tilde{\mathbf{p}}_n^n$$

Cinematica diretta nel caso di un manipolatore

Si consideri ora un manipolatore costituito da una catena cinematica aperta di $n+1$ corpi connessi da n giunti caratterizzati da $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$ gradi di mobilità (variabili di giunto), dove il primo corpo è la terra o la base. Siano \mathbf{n} (normale), \mathbf{s} (scivolamento, parallelo alla direzione di apertura/chiusura della pinza) e \mathbf{a} (approccio, orientato nella direzione e verso di avvicinamento) i versori della terna solidale all'utensile agganciato all'ultimo braccio e sia \mathbf{p} la posizione dell'origine di tale terna (fig. 5)³.

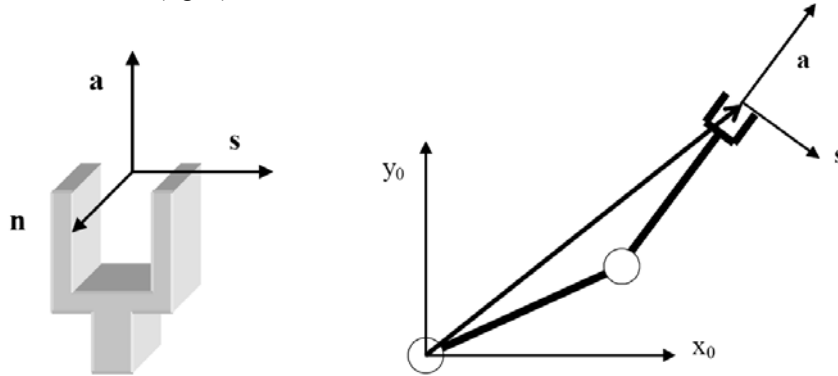


Figura 5: Cinematica della pinza

La posizione e l'orientamento della terna solidale all'utensile rispetto alla terra possono essere rappresentate mediante la matrice di trasformazione omogenea:

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_n^0(\mathbf{q}) & \mathbf{o}_n^0(\mathbf{q}) \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{n}_n^0(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_n^0(\mathbf{q}) & \mathbf{a}_n^0(\mathbf{q}) & \mathbf{o}_n^0(\mathbf{q}) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Il problema della cinematica diretta consiste nel determinare la matrice \mathbf{T} , ovvero nell'esprimere la posizione e l'orientamento della terna solidale all'utensile in funzione delle variabili di giunto \mathbf{q} che caratterizzano i gradi di mobilità del manipolatore.

Convenzione di Denavit-Hartenberg

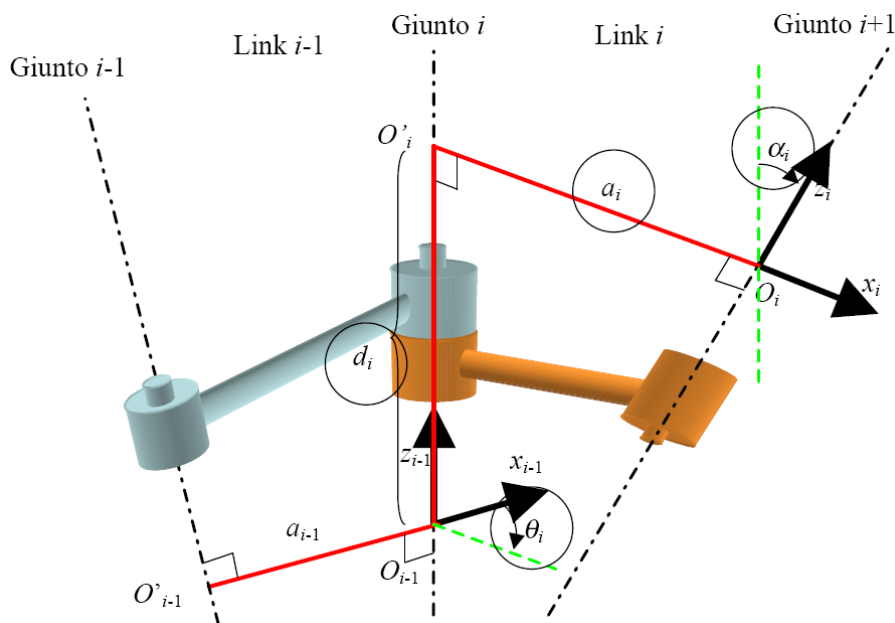


Figura 6: Parametri di Denavit-Hartenberg

La definizione dei parametri cinematici del robot che si vuole simulare deve essere fatta secondo la convenzione di *Denavit-Hartenberg*, uno strumento generale e sistematico per definire posizione e orientamento di due bracci

³ Non è detto che i versori (\mathbf{n} , \mathbf{s} , \mathbf{a}) corrispondano ordinatamente ai versori (\mathbf{x}_n , \mathbf{y}_n , \mathbf{z}_n).

consecutivi. Per rispettare tale convenzione è necessario seguire le seguenti regole fondamentali per la determinazione del generico sistema di riferimento associato ad ogni giunto con riferimento alla figura soprastante.

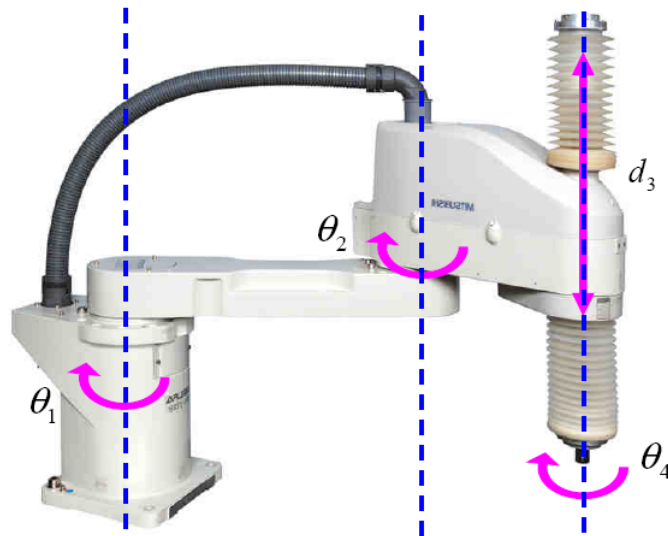


Figura 7: Variabili di giunto

L'algoritmo si sviluppa in tre fasi⁴:

1. Associazione di una terna (O_i, x_i, y_i, z_i), $i=1, \dots, n$ solidale ad ogni braccio;
2. Calcolo delle matrici di trasformazione omogenee \mathbf{A}_i^{i-1} fra le coppie di terne adiacenti;
3. Calcolo della trasformazione globale della terna fissa alla terna solidale all'utensile \mathbf{T}_n^0 .

Cinematica Diretta: lo SCARA

Il caso di interesse in questa sede è sviluppare tutto questo per un generico robot SCARA (RRP+pinza), formato da due giunti rotoidali (0 e 1), un prismatico (2) e la pinza che può però solo ruotare.

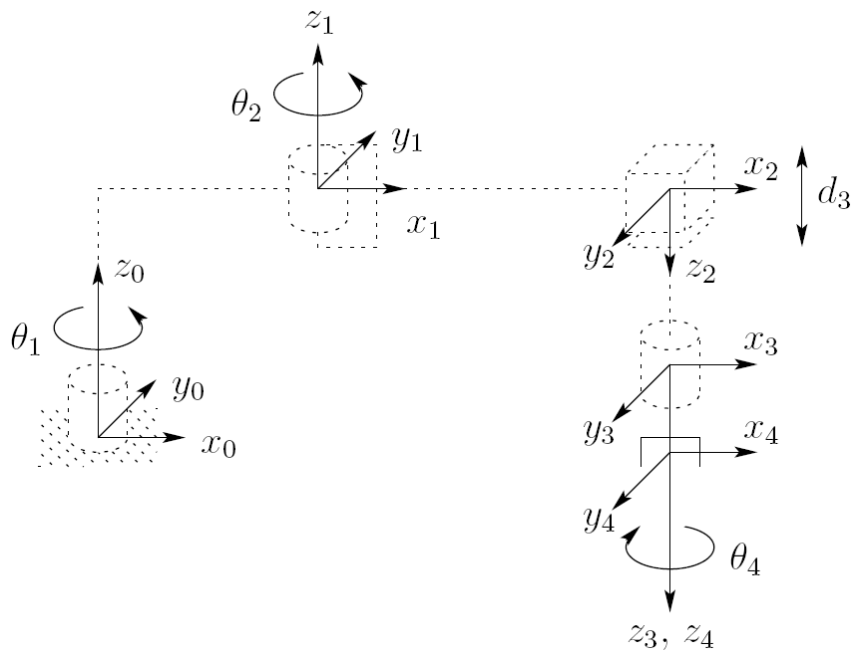


Figura 8: Denavit-Hartenberg SCARA

⁴ Per la descrizione dettagliata si rimanda a §5.

Come è possibile vedere dalla figura, le origini dei sistemi di riferimento vengono scelti per convenienza come riportato, ponendo l'asse x_0 nel piano di lavoro.

Questa scelta è completamente arbitraria e influenza solamente la configurazione "zero" del manipolatore, cioè la posizione di quest'ultimo quando $\theta_1=0$.

Di seguito la tabella completa di tutti i parametri necessari all'algoritmo (§7).

Braccio	α_i	a_i	θ_i	d_i
1	0	a_1	*	0
2	180°	a_2	*	0
3	0	0	0	*
4	0	0	*	d_4

Tabella 1: Parametri di Denavit-Hartenberg SCARA⁵

Le matrici di trasformazione omogenee:

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le equazioni della cinematica diretta in conclusione sono:

$$\mathbf{T}_4^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \mathbf{A}_4^3 = \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^6$$

Cinematica Inversa

Dati la posizione \mathbf{o}_n^0 della terna utensile e il suo orientamento \mathbf{R}_n^0 espressi nella terna fissa, si vuole determinare le variabili di giunto $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$ che consentono di ottenere quella posizione e quell'orientamento. Le equazioni che legano \mathbf{o}_n^0 e \mathbf{R}_n^0 a \mathbf{q} sono in generale non lineari e sono determinate dalle formule della cinematica diretta.

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_n^0 & \mathbf{o}_n^0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{x}_n^0(\mathbf{q}) & \mathbf{y}_n^0(\mathbf{q}) & \mathbf{z}_n^0(\mathbf{q}) & \mathbf{o}_n^0(\mathbf{q}) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \dim(\mathbf{q})=n$$

In questa relazione \mathbf{o}_n^0 e \mathbf{R}_n^0 sono funzioni assegnate del tempo, mentre $\mathbf{x}_n^0(\mathbf{q}), \mathbf{y}_n^0(\mathbf{q}), \mathbf{z}_n^0(\mathbf{q}), \mathbf{o}_n^0(\mathbf{q})$ sono le funzioni nelle incognite \mathbf{q} .

Tale problema può avere:

- *Soluzioni multiple in numero finito*: una posizione e un orientamento possono essere ottenute con configurazioni differenti del manipolatore;
- *Infinite soluzioni*: configurazioni singolari;
- *Nessuna soluzione*: la terna utensile data non appartiene allo spazio di lavoro.

⁵ Il simbolo "*" corrisponde a variabile di giunto.

⁶ $c_1 = \cos(\theta_1), s_1 = \sin(\theta_1), c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2) \dots$

Cinematica Inversa: lo SCARA

La cinematica inversa è data da:

$$\begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{o} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

poiché poi lo SCARA ha solo quattro gradi di libertà, non è possibile arrivare ad una soluzione in forma chiusa, a meno che \mathbf{R} non è del tipo⁷:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & -c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

in quel caso allora la somma $\theta_1 + \theta_2 - \theta_4$ è determinata da:

$$\theta_1 + \theta_2 - \theta_4 = \alpha = A \tan(r_{11}, r_{12}) \quad (1)$$

Proiettando il manipolatore nel piano x_0y_0 si nota immediatamente la situazione:

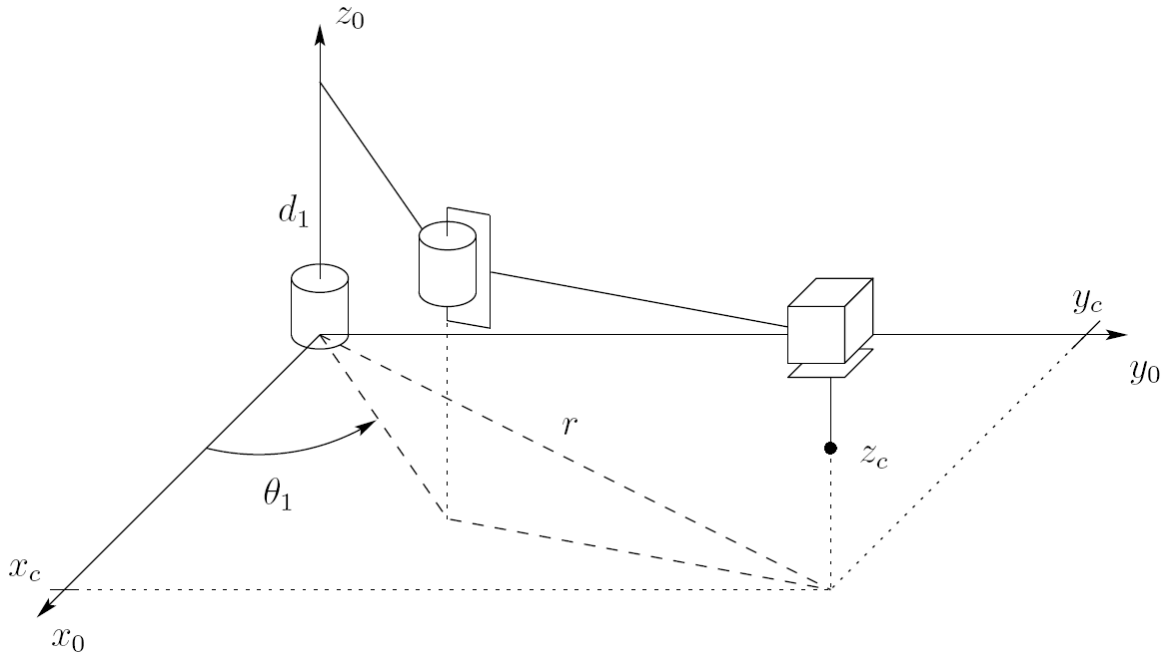


Figura 9: Manipolatore SCARA nel piano x_0y_0

Dalla fig. 9 è possibile notare che:

$$\theta_2 = A \tan(c_2, \pm\sqrt{1-c_2})$$

dove

$$c_2 = \frac{o_x^2 + o_y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

$$\theta_1 = A \tan(o_x, o_y) - A \tan(a_1 + a_2c_2, a_2s_2)$$

Da cui è possibile determinare θ_4 dalla (1) come segue:

$$\theta_4 = \theta_1 + \theta_2 - \alpha = \theta_1 + \theta_2 - A \tan(r_{11}, r_{12})$$

e finalmente d_3 :

$$d_3 = o_z + d_4$$

⁷ Soluzione particolare della cinematica inversa dello SCARA, dovuta ad una singolarità.

Cinematica Differenziale: Jacobiano Geometrico

Lo scopo della cinematica differenziale diretta è quello di calcolare velocità lineari e angolari⁸ dei corpi che costituiscono il manipolatore (in particolare della pinza) in funzione delle velocità dei giunti.

Al contrario la cinematica differenziale inversa ha lo scopo di calcolare le velocità da imprimere ai giunti per ottenere una assegnata velocità dell'end-effector.

Per determinare la velocità lineare e angolare della terna solidale alla pinza non è possibile sfruttare l'equazione della cinematica inversa, derivandola rispetto al tempo, poiché non è immediata la relazione fra velocità angolare e parametri della matrice di rotazione \mathbf{R} . Ad ogni modo, le due velocità possono essere espresse in funzione di quelle dei giunti:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{o}} = \mathbf{J}_v(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \end{cases}$$

cioè:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{o}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

La matrice $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{6 \times n}$ è detta **Jacobiano geometrico** e risolve il problema della cinematica differenziale.

A tal propositivo, si può adottare il *metodo geometrico* per il calcolo dello Jacobiano, che caratterizza il braccio intermedio in luogo dell'organo terminale, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{o}} = \mathbf{J}_v^{\ell_1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_1 + \dots + \mathbf{J}_v^{\ell_i}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_i \\ \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_\omega^{\ell_1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_1 + \dots + \mathbf{J}_\omega^{\ell_i}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_i \end{cases}$$

ove si sono evidenziati i contributi delle colonne degli Jacobiani relativi alle velocità dei giunti che precedono l'end effector.

Nel caso di un manipolatore, lo Jacobiano può essere costruito utilizzando la convenzione di D-H, e la colonna i-esima è in generale della forma⁹:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \wedge (\mathbf{o} - \mathbf{o}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}, \text{ se il giunto } i\text{-esimo è rotoidale } (\dot{q}_i = \dot{\theta}_i)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ se il giunto } i\text{-esimo è prismatico } (\dot{q}_i = \dot{d}_i)$$

Jacobiano: il caso dello SCARA

Tornando alla (2), nel caso del robot in esame $\mathbf{q} = [\theta_1 \ \theta_2 \ d_3 \ \theta_4]^T$. Visto che $\mathbf{o}_4 - \mathbf{o}_3$ è parallelo a \mathbf{z}_3 , ne segue che:

$$\mathbf{z}_3 \times (\mathbf{o}_4 - \mathbf{o}_3) = 0$$

lo Jacobiano quindi:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{o}_4 - \mathbf{o}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{o}_4 - \mathbf{o}_1) & \mathbf{z}_2 & 0 \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & 0 & \mathbf{z}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{o}_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{o}_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{o}_4 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_2 + a_2 s_{12} \\ d_3 - d_4 \end{bmatrix}$$

In modo analogo $z_0 = z_1 = k$ e $z_2 = z_3 = -k$.

Quindi:

⁸ Si rimanda a §5 per maggiori dettagli.

⁹ Dove tutti i versori sono espressi nella terna base.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} & 0 & 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$$

con $n=4$, gradi di libertà.

Da come è fatto lo Jacobiano, è ovvio che sono presenti singolarità cinematiche, oltre al fatto che sono impossibili rotazioni intorno all'asse x e y . Nel prossimo paragrafo, verranno appunto analizzate.

Singolarità cinematiche dello SCARA

E' semplice notare dalla seguente figura, le singolarità presenti:

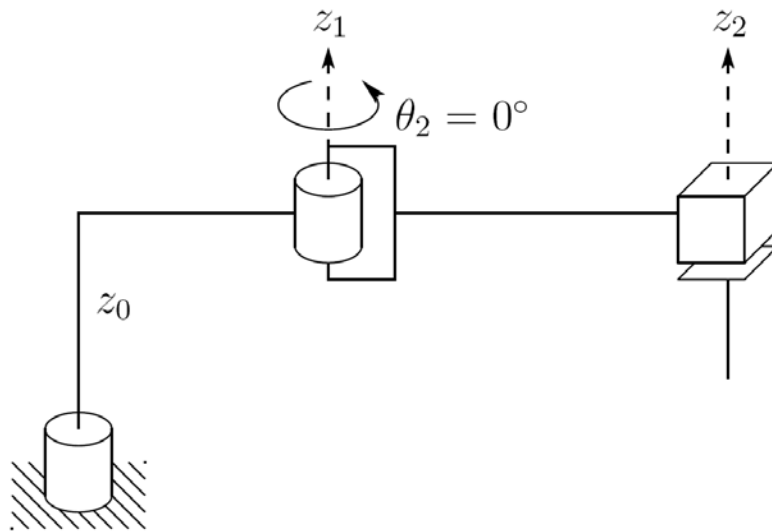


Figura 10: Singolarità dello SCARA

Si può notare infatti che l'unica singolarità presente è quando il gomito è completamente esteso o ritratto. Infatti:

$$\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{6 \times 4} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} (3 \times 3) & \mathbf{J}_{12} (3 \times 1) \\ \mathbf{J}_{21} (3 \times 3) & \mathbf{J}_{22} (3 \times 1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} & 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove:

- $\det(\mathbf{J}_{11})=0$ individua le singolarità della struttura;
- $\det(\mathbf{J}_{22})=0$ individua le singolarità del "polso".

Analizzando \mathbf{J}_{11} infatti, in particolare, sottraendo la seconda colonna alla prima:

$$\mathbf{J}'_{11} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 & -a_2 s_{12} & 0 \\ a_1 c_1 & a_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

si nota che, applicando le formule di Werner, il determinante è nullo se:

$$\det(\mathbf{J}'_{11}) = 0 \Rightarrow \sin(\theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_2 = 0, \pi$$

cioè quello che è possibile vedere dalla fig.10.

Dinamica

La deduzione del **modello dinamico** di un manipolatore gioca un ruolo di estrema importanza in relazione a problemi di **simulazione del moto**, di analisi di strutture di manipolazione e di determinazione di algoritmi di controllo.

La simulazione del moto di un manipolatore consente di provare strategie di controllo e tecniche di pianificazione di traiettoria senza la necessità di riferirsi a una struttura di manipolazione fisicamente disponibile.

La conoscenza di forze e coppie richieste per l'esecuzione di movimenti tipici fornisce informazioni utili al progetto di giunti e trasmissioni e alla scelta degli attuatori.

L'obiettivo della dinamica è pertanto la derivazione delle equazioni del moto di un manipolatore nello spazio dei giunti.

Formulazione di Lagrange: semplice e sistematica, consente di giungere al modello dinamico in forma chiusa ed è basato sul calcolo dell'energia.

Formulazione di Newton-Eulero: consente di dedurre un modello di tipo ricorsivo che risulta efficiente da un punto di vista computazionale ed è basato sull'analisi delle forze.

Dinamica dello SCARA: formulazione di Lagrange

Per i primi due bracci si considerano gli stessi parametri cinematici e dinamici del manipolatore planare a due bracci in fig. 11. I giunti 3 e 4 possono essere invece considerati come un unico corpo rigido che trasla lungo l'asse z_2 del giunto 3 e ruota intorno a z_3 del giunto 4. Sia m_{ℓ_3} la massa dell'ultimo corpo, appena descritto. Per semplicità si assume che il centro di massa \mathbf{o}_{ℓ_4} dell'ultimo link sia posizionato sull'asse z_3 . I_{ℓ_4} denota invece l'elemento [3,3] del **tensore d'inerzia** dell'ultimo braccio, relativo al centro di massa. Inoltre si assume trascurabile l'inerzia e la massa dei motori dei giunti 3 e 4. Grazie alla proprietà additiva, l'energia cinetica del manipolatore SCARA può essere calcolata aggiungendo l'energia cinetica dell'ultimo link a quella del manipolatore planare.

Ne segue che la matrice di inerzia totale è data da:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}'(\mathbf{q}) + \mathbf{B}''(\mathbf{q})$$

dove \mathbf{B}' è la matrice (4x4) ottenuta completando la matrice d'inerzia (2x2) del manipolatore planare a due bracci. Con due righe nulle e due colonne nulle, mentre \mathbf{B}'' è il contributo dell'ultimo corpo. Questa matrice ha tre proprietà: *Simmetrica, Definita Positiva e Dipende dalla configurazione* (in generale).

Dinamica del Manipolatore planare a due bracci

Si consideri il manipolatore planare a due bracci in fig. 11, per il quale il vettore delle variabili generalizzate risulta $\mathbf{q}=[\theta_1, \theta_2]^T$. Siano ℓ_1 e ℓ_2 le distanze dai baricentri dei due bracci dai rispettivi assi dei giunti, Siano inoltre m_{ℓ_1} e m_{ℓ_2} le masse dei due bracci ed m_{m1} e m_{m2} le masse dei rotori dei due motori ai giunti. Infine, siano I_{ℓ_1} e I_{ℓ_2} (la matrice \mathbf{I} , detta *tensore di inerzia*) i momenti di inerzia baricentrali dei due bracci intorno all'asse z_0 e I_{m1} e I_{m2} i momenti di inerzia intorno agli assi dei due rotori. Si suppone che $\mathbf{o}_{mi}=\mathbf{o}_{i-1}$ e $\mathbf{z}_{mi}=\mathbf{z}_{i-1}$ per $i=1,2$, ovvero i motori siano situati sugli assi dei giunti con baricentro in corrispondenza delle origini delle rispettive terne.

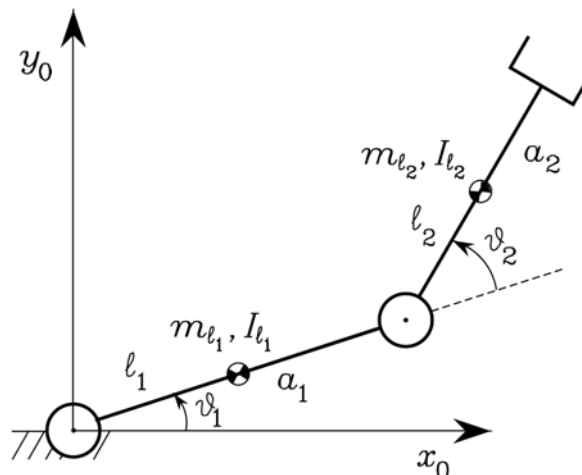


Figura 11: Manipolatore planare a due bracci

Con la scelta fatta delle terne di coordinate, il calcolo degli Jacobiano rispetto alla (2) fornisce:

$$\mathbf{J}_v^{\ell_1} = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 & 0 \\ \ell_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_v^{\ell_2} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - \ell_2 s_{12} & -\ell_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + \ell_2 c_{12} & \ell_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_\omega^{\ell_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_\omega^{\ell_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si osservi che $\omega_i, i=1,2$, è allineato con z_0 per cui \mathbf{R}_i non ha effetto. Si può quindi far riferimento ai momenti di inerzia scalari I_{ℓ_i} .

Per calcolare il contributo di energia cinetica relativo al motore del giunto, si può procedere in maniera formalmente analoga a quanto sviluppato in precedenza per il braccio. Considerando il caso tipico di motori elettrici rotanti in grado di azionare sia giunti rotoidali sia giunti prismatici mediante opportuni cinematismi, si suppone che il contributo della parte fissa (statore) sia stato incluso in quello relativo al braccio su cui tale motore è situato, e pertanto si deve calcolare solo il contributo del rotore.

Per esprimere l'energia cinetica del rotore in funzione delle variabili di giunto, è opportuno innanzitutto esprimere la velocità lineare del baricentro del rotore e la velocità angolare in funzione delle variabili di giunto:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{o}}_m = \mathbf{J}_v^{m_1}(\mathbf{q})\dot{q}_1 + \dots + \mathbf{J}_v^{m_i}(\mathbf{q})\dot{q}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_m = \mathbf{J}_\omega^{m_1}(\mathbf{q})\dot{q}_1 + \dots + \mathbf{J}_\omega^{m_i}(\mathbf{q})\dot{q}_i \end{cases}$$

La colonne dei Jacobiani sono composte come segue:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_v = \mathbf{z}_{i-1} \wedge (\mathbf{o} - \mathbf{o}_{i-1}) \\ \mathbf{J}_v = \mathbf{z}_{i-1} \end{cases} \quad \text{rispettivamente se il giunto } i\text{-esimo è rotoidale o se il giunto } i\text{-esimo è prismatico}$$

$$\begin{cases} \mathbf{J}_\omega = \mathbf{J}_\omega^\ell, & j = 1 \dots i-1 \\ \mathbf{J}_\omega = k_{r_i} \mathbf{z}_{m_i}, & j = i \end{cases}$$

Il calcolo dei Jacobiani relativi ai motori sono i seguenti:

$$\mathbf{J}_v^{m_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_v^{m_2} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 & 0 \\ a_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_\omega^{m_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{r_1} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_\omega^{m_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & k_{r_2} \end{bmatrix}$$

Ove k_{r_i} indica il rapporto di trasmissione al motore i .

In definitiva, sommando i vari contributi relativi ai singoli bracci e singoli rotori, l'energia cinetica complessiva del manipolatore, con attuatori, è espressa dalla formula:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

in cui:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \left(\underline{m_{\ell_i} \mathbf{J}_v^{(\ell_i)T} \mathbf{J}_v^{(\ell_i)} + \mathbf{J}_\omega^{(\ell_i)T} \mathbf{R}_i \mathbf{I}_{\ell_i}^i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_\omega^{(\ell_i)}} + \underline{m_{m_i} \mathbf{J}_v^{(m_i)T} \mathbf{J}_v^{(m_i)} + \mathbf{J}_\omega^{(m_i)T} \mathbf{R}_{m_i} \mathbf{I}_{m_i}^{m_i} \mathbf{R}_{m_i}^T \mathbf{J}_\omega^{(m_i)}} \right)$$

dove il primo termine sottolineato rappresenta l'energia cinetica dovuta al braccio i -esimo, il secondo l'energia cinetica dovuta al rotore i -esimo del rispettivo motore.

Pertanto considerando matrice di inerzia è:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} b_{11}(\theta_2) & b_{12}(\theta_2) \\ b_{21}(\theta_2) & b_{22}(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + k_{r_1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1 \ell_2 c_2) + I_{m_2} + m_{m_2} a_1^2$$

$$b_{12} = b_{21} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r2} I_{m_2}$$

$$b_{22} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \ell_2^2 + k_{r2} I_{m_2}$$

Come si nota la matrice di inerzia risulta dipendente dalla configurazione.

Si noti che il termine $k_{r2} I_{m_2}$ nell'elemento fuori diagonale della matrice di inerzia deriva dall'aver considerato la parte rotante dell'energia cinetica dei motori come dovuta alla velocità angolare totale, ovvero sia alla propria velocità angolare sia a quella dei bracci precedenti nella catena cinematica. In prima approssimazione, soprattutto in caso di elevati rapporti di trasmissione, tali contributi potrebbero essere trascurati; nel modello ridotto risultante, le inerzie dei motori comparirebbero esclusivamente negli elementi sulla diagonale della matrice di inerzia con termini del tipo $k_{ri}^2 I_{m_i}$. L'effetto di *Coriolis* e l'effetto centrifugo indotto al giunto i dalle velocità dei giunti j e k è rappresentato dalla matrice C il cui generico elemento risulta:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k$$

ove i simboli:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (3)$$

prendono il nome di *simboli di Christoffel del primo tipo*. Inoltre in virtù della simmetria di B , risulta $c_{ijk} = c_{ikj}$.

$$c_{111} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} = 0$$

$$c_{112} = c_{121} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 = h$$

$$c_{122} = \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = h$$

$$c_{211} = \frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -h$$

$$c_{212} = c_{221} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = 0$$

$$c_{222} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} = 0$$

Da cui la matrice C è data da:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} h\dot{\theta}_2 & h(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -h\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Effettuando il calcolo della matrice N , si ottiene:

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$= \begin{bmatrix} 2h\dot{\theta}_2 & h\dot{\theta}_2 \\ h\dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} h\dot{\theta}_2 & h(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -h\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2h\dot{\theta}_1 - h\dot{\theta}_2 \\ 2h\dot{\theta}_1 + h\dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

questa matrice risulta antisimmetrica, ovvero dato un qualsiasi vettore $\boldsymbol{\omega}$ di dimensione $(n \times 1)$ vale la relazione:

$$\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Una proprietà interessante, conseguenza diretta della anti-simmetria di $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, è che ponendo $\omega = \dot{\mathbf{q}}$ si ha

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = 0$$

il che riflette il *principio di conservazione dell'energia*.

In virtù di tale principio, la derivata totale dell'energia cinetica bilancia la potenza generata da tutte le forze agenti ai giunti del manipolatore.

Così come per l'energia cinetica, l'energia potenziale totale è data dalla somma dei contributi relativi a ogni braccio e dei contributi relativi ai rotori dei motori dei giunti:

$$U = - \sum_{i=1}^n (m_{\ell_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{o}_{\ell_i} + m_{m_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{o}_{m_i})$$

dalla quale si riconosce che, attraverso i vettori \mathbf{o}_{ℓ_i} e \mathbf{o}_{m_i} , essa risulta funzione delle sole variabili di giunto \mathbf{q} e non di $\dot{\mathbf{q}}$. Tenuto conto delle espressioni dell'energia cinetica e potenziale complessiva del sistema meccanico, la sua lagrangiana può scriversi come:

$$L = T - U$$

Le equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n$$

in cui Q è la forza generalizzata associata alla coordinata generalizzata (che rappresenta la configurazione di un sistema, ossia posizione e orientamento rispetto ad un sistema di riferimento) q_i . Alle forze generalizzate daranno contributo le forze non conservative, ovvero le coppie generate ai giunti dagli attuatori, le coppie di attrito ai giunti, nonché le coppie ai giunti indotte da forze dovute al contatto dell'organo terminale con l'ambiente (il termine coppia è utilizzato come sinonimo della forza generalizzata al giunto). Le equazioni di Lagrange definiscono la relazione esistente tra forze generalizzate applicate al manipolatore e posizioni, velocità e accelerazioni ai giunti. Esse consentono pertanto di dedurre il modello dinamico del manipolatore, a partire dalla determinazione dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del sistema meccanico.

Per il calcolo dei termini gravitazionali, essendo $\mathbf{g}_0 = [0 \quad -g \quad 0]^T$, tenendo conto dell'equazione, che si ricava dal secondo termine dell'equazione di Lagrange:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = - \sum_{j=1}^n (m_{\ell_j} \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_v^{\ell_j}(\mathbf{q}) + m_{m_j} \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_v^m(\mathbf{q})) = g_i(\mathbf{q})$$

sostituendo le colonne degli Jacobiani di cui sopra si ottiene:

$$\begin{aligned} g_1 &= (m_{\ell_1} \ell_1 + m_{m_2} a_1 + m_{\ell_2} a_1) g c_1 + m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} \\ g_2 &= m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} \end{aligned}$$

Dinamica totale dello SCARA

$$\mathbf{B}''(\mathbf{q}) = m_{\ell_3} \mathbf{J}_v^{(\ell_4)T} \mathbf{J}_v^{(\ell_4)} + \mathbf{J}_\omega^{(\ell_4)T} \mathbf{R}_4 \mathbf{I}_{\ell_4}^i \mathbf{R}_4^T \mathbf{J}_\omega^{(\ell_4)}$$

mentre il calcolo dello Jacobiano:

$$\mathbf{J}_v^{\ell_4} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} & 0 & 0 \\ a_1 c_1 - a_2 c_{12} & a_2 c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_\omega^{\ell_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi gli elementi non nulli della matrice $\mathbf{B}''(\mathbf{q})$ sono:

$$\begin{aligned} b_{11}'' &= m_{\ell_3} (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2) + I_{\ell_4} \\ b_{12}'' &= b_{21}'' = m_{\ell_3} (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) + I_{\ell_4} \\ b_{14}'' &= b_{41}'' = I_{\ell_4} \\ b_{22}'' &= m_{\ell_3} a_2^2 + I_{\ell_4} \\ b_{24}'' &= b_{42}'' = I_{\ell_4} \\ b_{33}'' &= m_{\ell_3} \\ b_{44}'' &= I_{\ell_4} \end{aligned}$$

ne segue che gli elementi non nulli della matrice d'inerzia dello SCARA sono:

$$b_{11} = I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1 \ell_2 c_2) + I_{m2} + m_{m2} a_1^2 + m_{\ell_3} (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2) + I_{\ell_4}$$

$$b_{12} = b_{21} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r2}^2 I_{m2} + m_{\ell_3} (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) + I_{\ell_4}$$

$$b_{14} = b_{41} = I_{\ell_4}$$

$$b_{22} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m2} + m_{\ell_3} a_2^2 + I_{\ell_4}$$

$$b_{24} = b_{42} = I_{\ell_4}$$

$$b_{33} = m_{\ell_3}$$

$$b_{44} = I_{\ell_4}$$

Per quanto concerne i simboli di Christoffel, per lo SCARA:

$$c_{ijk} = c'_{ijk} + c''_{ijk}$$

dove c'_{ijk} sono quelli del manipolatore planare a due bracci, mentre c''_{ijk} sono calcolati dagli elementi b''_{ij} di $\mathbf{B}''(\mathbf{q})$ come in (3), ne segue che i termini non nulli sono:

$$c_{112} = -m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 - m_{\ell_3} a_1 a_2 s_2 = k$$

$$c_{122} = k$$

$$c_{211} = -k$$

che portano ad avere la seguente matrice:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} k\dot{\theta}_2 & k(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 & 0 \\ -k\dot{\theta}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per quanto concerne invece i termini gravitazionali, è di semplice intuizione che questi riguardano solamente il giunto 3, con l'espressione:

$$\mathbf{g}_3 = m_{\ell_3} \mathbf{g}$$

In definitiva, le equazioni del moto in assenza di attriti e forze di contatto all'organo terminale derivanti dalla seguente equazione:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

dove \mathbf{B} è la matrice d'inerzia, \mathbf{C} la matrice delle azioni centrifughe e di Coriolis, \mathbf{g} il vettore delle azioni di gravità, $\boldsymbol{\tau}$ le coppie ai giunti e risultano:

$$(I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1 \ell_2 c_2) + I_{m2} + m_{m2} a_1^2 + m_{\ell_3} (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2) + I_{\ell_4}) \ddot{\theta}_1 \\ + (I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r2}^2 I_{m2} + m_{\ell_3} (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) + I_{\ell_4}) \ddot{\theta}_2 \\ + I_{\ell_4} \ddot{\theta}_4$$

$$-2(m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 + m_{\ell_3} a_1 a_2 s_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 + m_{\ell_3} a_1 a_2 s_2) \dot{\theta}_2^2 = \tau_1$$

$$(I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r2}^2 I_{m2} + m_{\ell_3} (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) + I_{\ell_4}) \ddot{\theta}_1$$

$$+ (I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m2} + m_{\ell_3} a_2^2 + I_{\ell_4}) \ddot{\theta}_2$$

$$+ I_{\ell_4} \ddot{\theta}_4$$

$$+ (m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 + m_{\ell_3} a_1 a_2 s_2) \dot{\theta}_1^2 = \tau_2$$

$$m_{\ell_3} \ddot{\theta}_3 + m_{\ell_3} \mathbf{g} = \tau_3$$

$$I_{\ell_4} \ddot{\theta}_1 + I_{\ell_4} \ddot{\theta}_2 + I_{\ell_4} \ddot{\theta}_4 = \tau_4$$

Dinamica: formulazione di Eulero-Newton

La formulazione di Lagrange consente di ricavare un sistema di equazioni differenziali non lineari del secondo ordine, che descrivono il comportamento dinamico del robot. Tuttavia l'uso di queste equazioni per calcolare in tempo reale i momenti nominali dei giunti in funzione della posizione, velocità ed accelerazione per ogni dato punto della traiettoria, costituisce un collo di bottiglia computazionale per un controllo real-time. Il problema è dovuto principalmente alla inefficienza delle equazioni del moto di Eulero-Lagrange, che utilizzano matrici di trasformazione omogenee 4x4. Per effettuare il controllo in tempo reale, è stato inizialmente proposto un modello dinamico semplificato che ignora le forze centrifughe e quelle di Coriolis. Ciò riduce il tempo necessario al calcolo dei momenti dei giunti a un valore accettabile. Le forze centrifughe e quelle di Coriolis sono però significative per i momenti dei giunti se il manipolatore si muove ad alta velocità. Ne consegue che questa dinamica semplificata del robot limita la velocità di movimento di ciascun link e ciò non è desiderabile nel tipico ambiente manifatturiero. Inoltre, gli errori nei momenti dei giunti, risultanti dalla mancata conoscenza delle forze di Coriolis e di quelle centrifughe, non possono essere corretti con un controllo retroazionato quando il braccio si muove ad alta velocità, a causa degli eccessivi momenti correttivi richiesti. Per superare questi inconvenienti e per trovare equazioni del moto più efficaci, molti ricercatori si sono rivolti alla seconda legge di Newton, e hanno sviluppato varie configurazioni di equazioni di moto di Newton-Eulero per una catena cinematica aperta.

Applicando questa formulazione al braccio di un robot si ottiene un sistema di equazioni ricorsive dirette e inverse con termini di prodotto vettoriale "disordinati". La caratteristica più importante e significativa di questa formulazione risiede nel fatto che il tempo di calcolo dei momenti applicati può essere notevolmente ridotto per permettere un controllo in tempo reale del manipolatore robotico. La derivazione è basata sul principio di D'Alembert e su di un sistema di equazioni matematiche che descrivono la relazione cinematica del movimento dei link rispetto al sistema di coordinate fondamentale.

Equazioni ricorsive del moto dei manipolatori

Partendo dalla conoscenza della cinematica di ciascun giunto, si vuole descrivere il moto dei link del braccio applicando il principio di D'Alembert a ogni giunto.

Tale principio applica le condizioni di equilibrio statico ai problemi della cinematica considerando sia le forze di attuazione applicate esternamente, sia le forze di reazione degli elementi meccanici che si oppongono al movimento. Il principio di D'Alembert è valido in tutti gli istanti di tempo. E' effettivamente una forma leggermente modificata della seconda legge del moto di Newton, e può essere così enunciato:

Per ogni corpo, la somma algebrica delle forze applicate esternamente e di quelle che oppongono resistenza al moto in qualunque direzione è zero.

Si considera un link i , come mostrato nella fig. 12 e si ammette che l'origine O' sia situata in corrispondenza del suo baricentro.

Le variabili indefinite, espresse rispetto al sistema fondamentale di riferimento (x_0, y_0, z_0) sono:

m_i = massa complessiva del link i ;

$\bar{\mathbf{r}}_i$ = posizione del baricentro del link i dall'origine del sistema di riferimento applicato alla base;

$\bar{\mathbf{s}}_i$ = posizione del baricentro del link i dall'origine del sistema di coordinate (x_i, y_i, z_i) ;

\mathbf{p}_{i-1} = origine del sistema di coordinate i -esimo rispetto al sistema di coordinate $(i-1)$ -esimo;

$\bar{\mathbf{v}}_i$ = $d\mathbf{r}_i/dt$ = velocità lineare del baricentro del link i ;

$\bar{\mathbf{a}}_i$ = $d\mathbf{v}_i/dt$ = accelerazione lineare del baricentro del link i ;

\mathbf{F}_i = risultante delle forze esterne applicate al link i nel baricentro;

\mathbf{N}_i = momento esterno risultante applicato al link i nel baricentro;

\mathbf{I}_i = matrice di inerzia del link i intorno al suo baricentro relativamente al sistema di coordinate (x_0, y_0, z_0) ;

\mathbf{f}_i = forza esercitata sul link i dal link $i-1$ nel sistema di coordinate $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ per reggere il link i e i link successivi;

\mathbf{n}_i = momento esercitato sul link i dal link $i-1$ sul sistema di coordinate $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$;

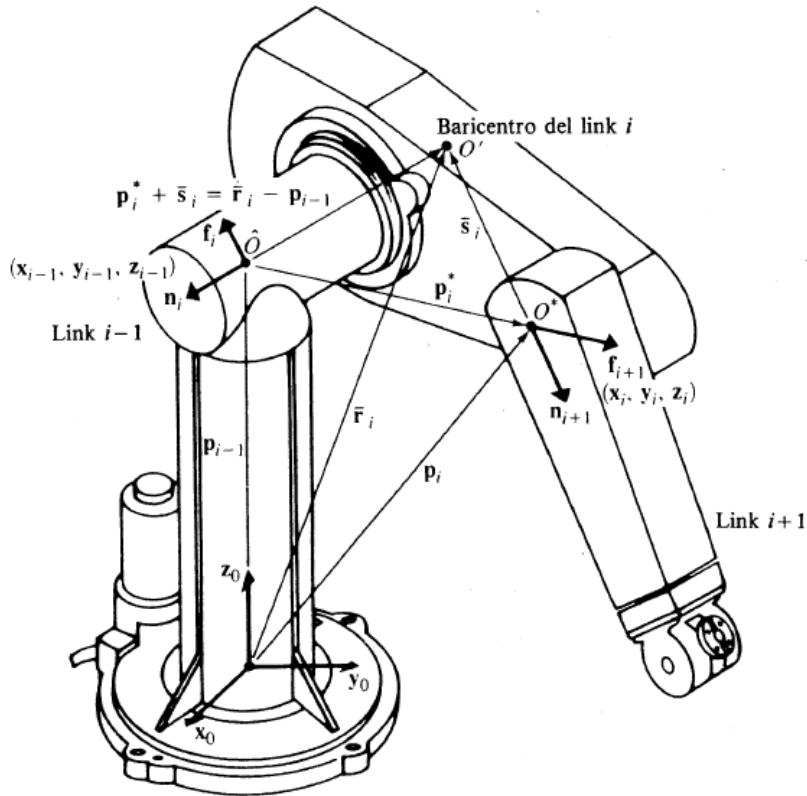


Figura 12: Forze e momenti sul link i

Riassumendo, le equazioni di moto di Newton-Eulero consistono in un sistema di equazioni ricorsive dirette e inverse.

Per le equazioni ricorsive dirette, la velocità e l'accelerazione lineare e angolare di ogni link si propagano dal sistema di riferimento fondamentale (coincidente con la base di appoggio) all'estremità dell'effettore.

Per le equazioni ricorsive inverse, i momenti e le forze esercitati su ogni link sono calcolati in modo ricorsivo dall'estremità dell'effettore al sistema di riferimento fondamentale.

Dunque, le equazioni dirette propagano informazioni cinematiche di ciascun link dal sistema fondamentale alla mano, mentre le equazioni inverse calcolano i momenti/forze necessari per ogni giunto dalla mano al sistema di riferimento fondamentale. Le equazioni sono elencate di seguito:

Equazioni Dirette ($i=1,2,\dots,n$)¹⁰:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_{i-1} \dot{q}_i & \text{se il link } i \text{ è rotoidale} \\ \boldsymbol{\omega}_{i-1} & \text{se il link } i \text{ è prismatico} \end{cases}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \mathbf{z}_{i-1} \ddot{q}_i + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times (\mathbf{z}_{i-1} \dot{q}_i) & \text{se il link } i \text{ è rotoidale} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} & \text{se il link } i \text{ è prismatico} \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{p}_i^* + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1} & \text{se il link } i \text{ è rotoidale} \\ \mathbf{z}_{i-1} \ddot{q}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{p}_i^* + 2\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{z}_{i-1} \dot{q}_i) + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1} & \text{se il link } i \text{ è prismatico} \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \bar{\mathbf{s}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \bar{\mathbf{s}}_i) + \mathbf{v}_i$$

Equazioni Inverse:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i)$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{i+1}$$

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{f}_{i+1} + (\mathbf{p}_i^* \times \bar{\mathbf{s}}_i) \times \mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i$$

¹⁰ In questo caso con il vettore \mathbf{p} si fa riferimento al vettore \mathbf{o} di posizione.

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{n}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + b_i \dot{q}_i & \text{se il link } i \text{ è rotoidale} \\ \mathbf{f}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + b_i \dot{q}_i & \text{se il link } i \text{ è prismatico} \end{cases}$$

dove b_i è il coefficiente di smorzamento viscoso per il giunto i .

Le condizioni iniziali "consuete" sono: $\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{v}}_0 = [0, 0, g_z]^T$.

Le precedenti equazioni di moto del braccio indicano che le equazioni dinamiche risultanti N - E, escludendo la frizione degli ingranaggi, costituiscono un sistema di equazioni ricorsive compatte dirette e inverse. Questo sistema può essere applicato sequenzialmente al braccio del robot. La ricorsività diretta propaga l'informazione cinematica: le velocità angolari, le accelerazioni angolari e le accelerazioni lineari dal sistema di riferimento fondamentale (sistema inerziale) all'estremità dell'effettore.

La ricorsività inversa trasmette invece le forze esercitate su ciascun link dall'estremità dell'effettore al sistema di riferimento fondamentale, e i momenti applicati ai giunti sono calcolati in base a queste forze.

Un ovvio inconveniente delle equazioni di moto ricorsive sopra descritte risiede nel fatto che tutte le matrici inerziali \mathbf{I}_i e i parametri geometrici fisici (\mathbf{r}_i ; \mathbf{s}_i ; $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i^*$) sono riferiti al sistema di coordinate fondamentale. Ne consegue che essi variano conseguentemente al movimento del robot.

Successivamente si sono perfezionate le precedenti equazioni di moto di N-E riferendo tutte le velocità, accelerazioni, matrici inerziali, posizione del baricentro di ogni link, e i momenti/forze ai sistemi di coordinate di ogni link. In virtù della natura della formulazione e del metodo per calcolare i momenti dei giunti, i calcoli si semplificano notevolmente. La conseguenza più importante di questa modificazione è che il tempo di calcolo dei momenti applicati è linearmente proporzionale al numero dei giunti del braccio ed è indipendente dalla sua configurazione. Ciò permette l'implementazione di un controllo in tempo reale, per il braccio, nello spazio delle variabili dei giunti.

Sia \mathbf{R}_i^{i-1} una matrice di rotazione 3x3 che trasforma ogni vettore riferito al sistema di coordinate x_i ; y_i ; z_i nel sistema di coordinate x_{i-1} ; y_{i-1} ; z_{i-1} . Tale matrice è la sottomatrice 3x3 superiore sinistra della matrice di trasformazione omogenea \mathbf{T}_i^{i-1} .

Ciò significa che tutti i vettori che devono essere trasformati dalla terna $i+1$ alla terna i vengono moltiplicati per la matrice \mathbf{R}_{i+1}^i , mentre tutti i vettori che devono essere trasformati dalla terna $i-1$ alla terna i devono essere moltiplicati per \mathbf{R}_{i-1}^i (\mathbf{R}_i^{i-1})^T.

Invece di calcolare $\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \dot{\mathbf{v}}_i, \dot{\mathbf{a}}_i, \mathbf{p}_i^*, \mathbf{s}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{N}_i, \mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i$ e τ_i , che si riferiscono al sistema di coordinate fondamentale, si calcolano $\mathbf{R}_0^i \mathbf{p}_i^*, \mathbf{R}_0^i \bar{\mathbf{s}}_i, \mathbf{R}_0^i \mathbf{F}_i, \mathbf{R}_0^i \mathbf{N}_i, \mathbf{R}_0^i \mathbf{f}_i, \mathbf{R}_0^i \mathbf{n}_i$ e $\mathbf{R}_0^i \tau_i$, che si riferiscono al sistema di coordinate del rispettivo link x_i ; y_i ; z_i .

Dunque, le equazioni diventano

Equazioni dirette: $i=1, 2, \dots, n$

$$\mathbf{R}_0^i \boldsymbol{\omega}_i = \begin{cases} \mathbf{R}_{i-1}^i (\mathbf{R}_0^{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_{i-1} \dot{q}_i) & \text{se il link } i \text{ è rotoidale} \\ \mathbf{R}_{i-1}^i (\mathbf{R}_0^{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1}) & \text{se il link } i \text{ è prismatico} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_0^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{cases} \mathbf{R}_{i-1}^i [\mathbf{R}_0^{i-1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \mathbf{z}_0 \ddot{q}_i + (\mathbf{R}_0^{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times (\mathbf{z}_0 \dot{q}_i)] & \text{se il link } i \text{ è rotoidale} \\ \mathbf{R}_{i-1}^i (\mathbf{R}_0^{i-1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}) & \text{se il link } i \text{ è prismatico} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_0^i \dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} (\mathbf{R}_0^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i) \times (\mathbf{R}_0^i \mathbf{p}_i^*) + (\mathbf{R}_0^i \boldsymbol{\omega}_i) \times [(\mathbf{R}_0^i \boldsymbol{\omega}_i) \times (\mathbf{R}_0^i \mathbf{p}_i^*)] + \mathbf{R}_{i-1}^i (\mathbf{R}_0^{i-1} \dot{\mathbf{v}}_{i-1}) & \text{se il link } i \text{ è rotoidale} \\ \mathbf{R}_{i-1}^i (\mathbf{z}_0 \ddot{q}_i + \mathbf{R}_0^{i-1} \dot{\mathbf{v}}_{i-1}) + (\mathbf{R}_0^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i) \times (\mathbf{R}_0^i \mathbf{p}_i^*) + \\ + 2(\mathbf{R}_0^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i) \times (\mathbf{R}_0^i \mathbf{z}_0 \dot{q}_i) + (\mathbf{R}_0^i \boldsymbol{\omega}_i) \times [(\mathbf{R}_0^i \boldsymbol{\omega}_i) \times (\mathbf{R}_0^i \mathbf{p}_i^*)] & \text{se il link } i \text{ è prismatico} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_0^i \bar{\mathbf{a}}_i = (\mathbf{R}_0^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i) \times (\mathbf{R}_0^i \bar{\mathbf{s}}_i) + (\mathbf{R}_0^i \boldsymbol{\omega}_i) \times [(\mathbf{R}_0^i \boldsymbol{\omega}_i) \times (\mathbf{R}_0^i \bar{\mathbf{s}}_i)] + \mathbf{R}_0^i \mathbf{v}_i$$

Equazioni inverse: $i=n, n-1, \dots, 1$

$$\mathbf{R}_0^i \mathbf{f}_i = \mathbf{R}_0^i \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_{i+1}^i (\mathbf{R}_0^{i+1} \mathbf{f}_{i+1})$$

$$\mathbf{R}_0^i \mathbf{n}_i = \mathbf{R}_{i+1}^i [\mathbf{R}_0^{i+1} \mathbf{n}_{i+1} + (\mathbf{R}_0^{i+1} \mathbf{p}_i^*) \times (\mathbf{R}_0^{i+1} \mathbf{f}_{i+1})] + (\mathbf{R}_0^i \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{R}_0^i \bar{\mathbf{s}}_i) \times (\mathbf{R}_0^i \mathbf{F}_i) + \mathbf{R}_0^i \mathbf{N}_i$$

$$\tau_i = \begin{cases} (\mathbf{R}_0^i \mathbf{n}_i)^T (\mathbf{R}_{i-1}^i \mathbf{z}_0) + b_i \dot{q}_i & \text{se il link } i \text{ è rotoidale} \\ (\mathbf{R}_0^i \mathbf{f}_i)^T (\mathbf{R}_{i-1}^i \mathbf{z}_0) + b_i \dot{q}_i & \text{se il link } i \text{ è prismatico} \end{cases}$$

dove b_i è il coefficiente di smorzamento viscoso per il giunto i .

Le condizioni iniziali "consuete" sono: $\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{v}}_0 = [0, 0, g_z]^T$.

Algoritmo di calcolo

Le equazioni di moto di Newton-Eulero rappresentano oggi il sistema di equazioni più efficiente che possa essere implementato su un calcolatore. Infatti le operazioni matematiche complessive (moltiplicazioni e addizioni) sono proporzionali a n , che rappresenta il numero di gradi di libertà del braccio.

Dato che le equazioni di moto che sono state ottenute sono per natura ricorsive, è consigliabile considerare un approccio algoritmico per il calcolo dei momenti/forze applicati ai giunti per tutti gli attuatori dei giunti. Un siffatto algoritmo è descritto qui di seguito.

Algoritmo:

Dato un manipolatore a n link, questo procedimento di calcolo ricava il momento/forza nominale applicato a ogni giunto per tutti gli attuatori dei giunti. I calcoli sono basati sulle equazioni scritte sopra.

Condizioni iniziali:

- n = numero dei link (n giunti);
- $\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{v}}_0 = [0, 0, g_z]^T$ dove $|g| = 9.8062 \text{ m/s}^2$;
- Le variabili dei giunti sono: $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ per $i = 1, 2, \dots, n$;
- Le variabili dei link sono: $i, \mathbf{F}_i, \mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i, \tau_i$;

Iterazioni dirette:

NE1. [Inizializza il contatore delle iterazioni]. Pone $i \leftarrow 1$;

NE2. [Iterazione diretta per l'informazione cinematica]. Calcola $\mathbf{R}_0^i \boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{R}_0^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \mathbf{R}_0^i \dot{\mathbf{v}}_i, \mathbf{R}_0^i \bar{\mathbf{a}}_i$ utilizzando le equazioni scritte sopra;

NE3. [Verifica se $i = n$]. Se $i = n$, va al passo NE4.; altrimenti pone $i \leftarrow i + 1$ e ritorna a NE2.

Iterazioni inverse:

NE4. [Assegna un valore a \mathbf{f}_{n+1} e \mathbf{n}_{n+1}]. Pone \mathbf{f}_{n+1} e \mathbf{n}_{n+1} pari alla forza e al momento richiesti, rispettivamente, per portare il carico. Se non c'è carico, li pone a zero;

NE5. [Calcola la forza/momento del giunto]. Calcola $\mathbf{R}_0^i \mathbf{F}_i, \mathbf{R}_0^i \mathbf{N}_i, \mathbf{R}_0^i \mathbf{f}_i, \mathbf{R}_0^i \mathbf{n}_i$ e τ_i , dati \mathbf{f}_{n+1} e \mathbf{n}_{n+1} ;

NE6. [Iterazione inversa]. Se $i = n$, termina; altrimenti pone $i \leftarrow i - 1$ e va al passo NE5.

Confronto formulazione Lagrange con formulazione Newton-Eulero

La formulazione di Lagrange e la formulazione di Newton-Eulero consentono di calcolare le relazioni esistenti tra le coppie di attuazione ai giunti (ed eventualmente le forze all'organo terminale) e il moto della struttura. Un confronto tra le due formulazione mette in evidenza quanto segue.

La formulazione di Lagrange presenta i seguenti vantaggi:

- è sistematica e di facile comprensione;
- fornisce le equazioni di moto del robot in una forma analitica compatta che evidenzia la matrice generalizzata di inerzia $\mathbf{B}(\mathbf{q})$, la matrice a fattore delle forze centrifughe e di Coriolis $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ e il vettore delle forze gravitazionali $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ (utile ai fini delle sintesi del controllo);
- è efficace se si vogliono considerare effetti meccanici più complessi come le deformazioni elastiche dei bracci.

La formulazione di Newton-Eulero presenta il seguente vantaggio fondamentale:

- è intrinsecamente un metodo ricorsivo che risulta efficiente da un punto di vista computazionale e particolarmente adatto ad essere implementato all'interno di un calcolatore.

Applicazione MATLAB: Simulazione Pick and Place SCARA

Si vuole simulare i risultati ottenuti, soprattutto per quanto concerne la cinematica dello SCARA, simulando un'azione di Pick and Place.

Definizione di un oggetto ROBOT mediante il Robotics Toolbox

Per creare un oggetto robot che racchiuda le caratteristiche cinematiche e dinamiche del manipolatore che si vuole simulare, si utilizza la sintassi del Robotics Toolbox (§2), uno strumento sviluppato per MATLAB, utile per la simulazione di manipolatori seriali.

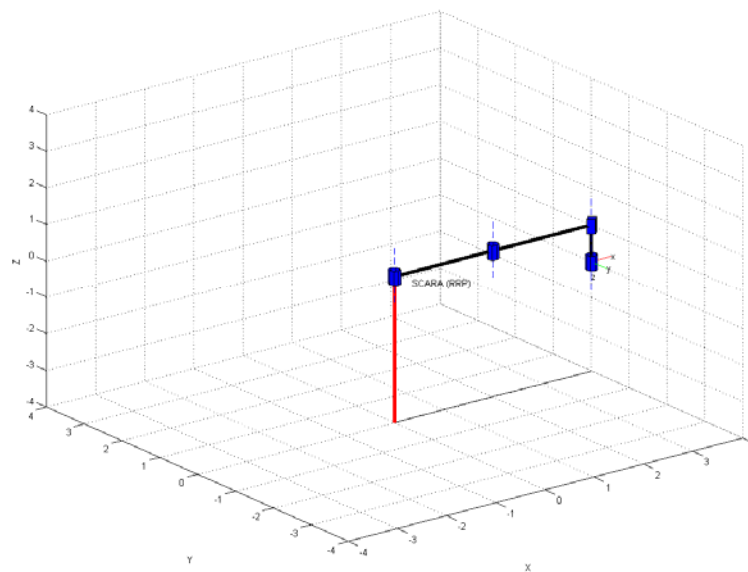


Figura 13: Posizione a riposo (P1)

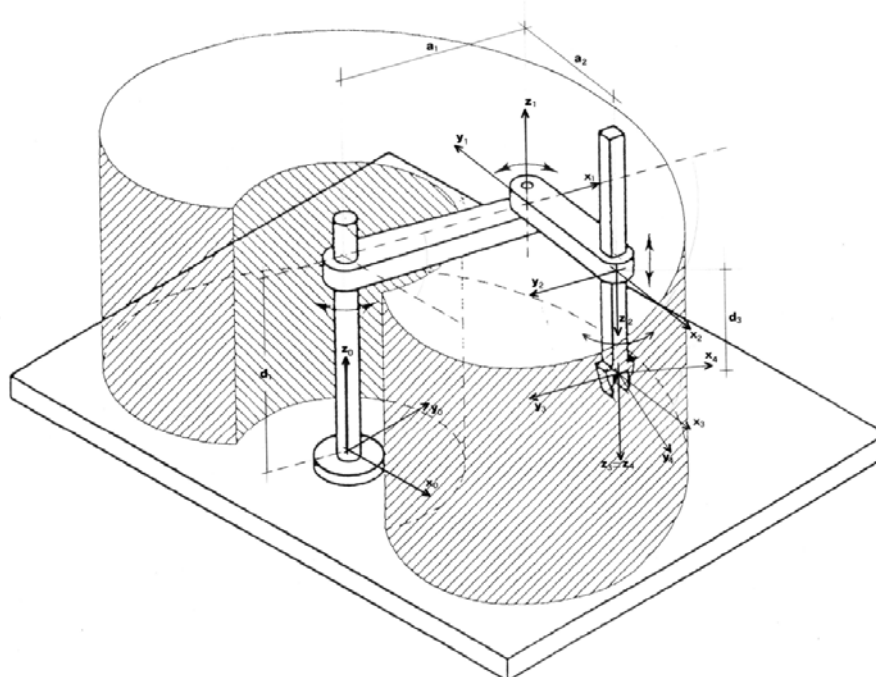


Figura 14: Spazio di lavoro dello SCARA

In particolare viene creato un file MATLAB $.m$ ¹¹, che esegue le seguenti operazioni:

1. genera un oggetto robot, con tutti i parametri (molti simbolici) dello SCARA ($robot(\{L1, L2, L3, L4\})$);
2. calcola la cinematica diretta attraverso la convenzione di Denavit-Hartenberg (la matrice \mathbf{T});
3. fissa la posizione iniziale di tutti i giunti (posizione di riposo);
4. calcola la posizione della pinza, dato il punto da raggiungere (attraverso la funzione $fkine$);
5. generazione della traiettoria nello spazio dei giunti (attraverso la funzione $jttraj$);
6. disegna lo scheletro del robot, attraverso le informazioni date dalla cinematica diretta, fig.13;
7. fissa il tempo per la simulazione e il periodo di campionamento;
8. genera le altre 5 posizioni necessarie ad effettuare il *pick and place*;
9. genera i grafici di posizione, velocità ed accelerazione di tutti i giunti, in ogni posizione;
10. calcola la cinematica differenziale, in particolare lo Jacobiano geometrico;
11. costruisce un'interfaccia grafica che permette di pilotare il robot in tutto lo spazio di lavoro (fig.14).

Risultati della simulazione

Per quanto concerne l'azione di *pick and place*, si vuole:

1. posizionare il braccio dalla posizione di riposo $q_{Riposo}=[0 \ 0 \ 1 \ 0]$;
2. portarlo a $qA=[\pi/2 \ \pi/2 \ 1 \ 0]$;
3. prendere il pezzo in $qB=[\pi/2 \ \pi/2 \ 3 \ 0]$;
4. riportarlo in qA ;
5. spostare il braccio fino alla posizione in cui posare il pezzo $qC=[\pi/2 \ 0 \ 1 \ 0]$;
6. posare il pezzo in $qD=[\pi/2 \ 0 \ 3 \ 0]$;

Nelle figure successive vengono riportati i grafici della posizione, velocità ed accelerazione dei giunti, in tutte le posizioni.

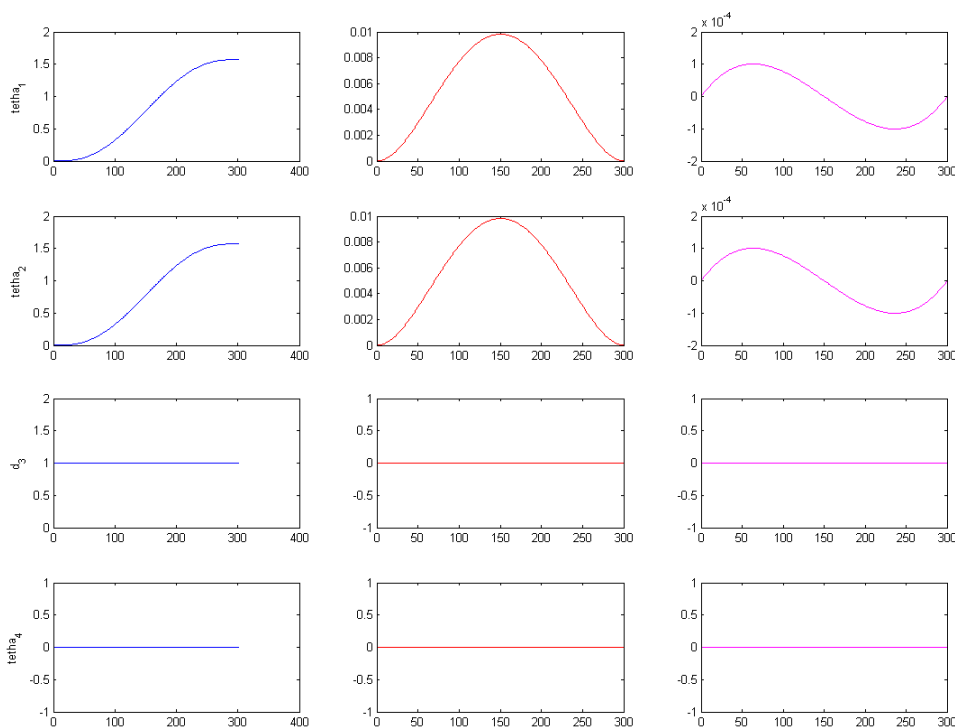


Figura 15: Posizioni, velocità ed accelerazioni dei giunti in qA

¹¹ Si rimanda all'appendice, per il codice MATLAB.

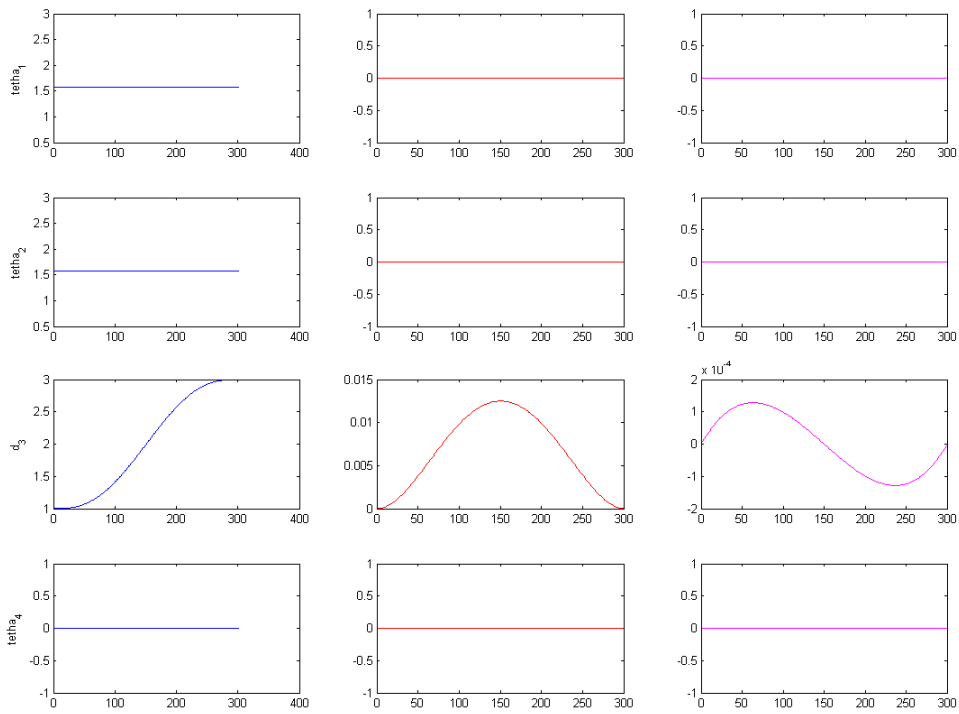


Figura 16: Posizioni, velocità ed accelerazioni dei giunti in qB

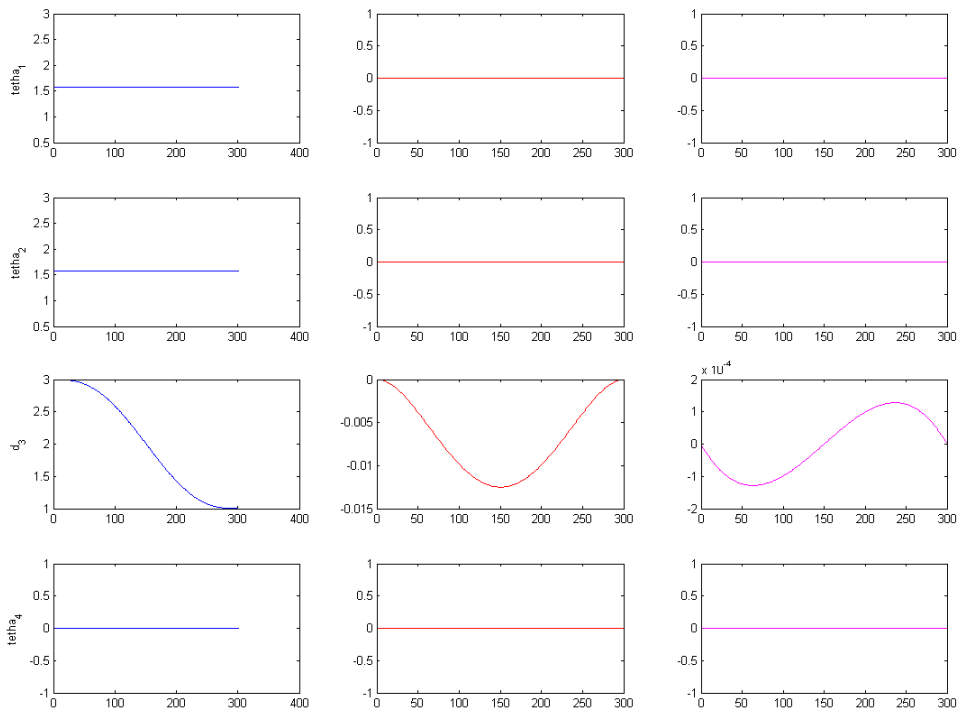


Figura 17: Posizioni, velocità ed accelerazioni dei giunti nel ritorno in qA

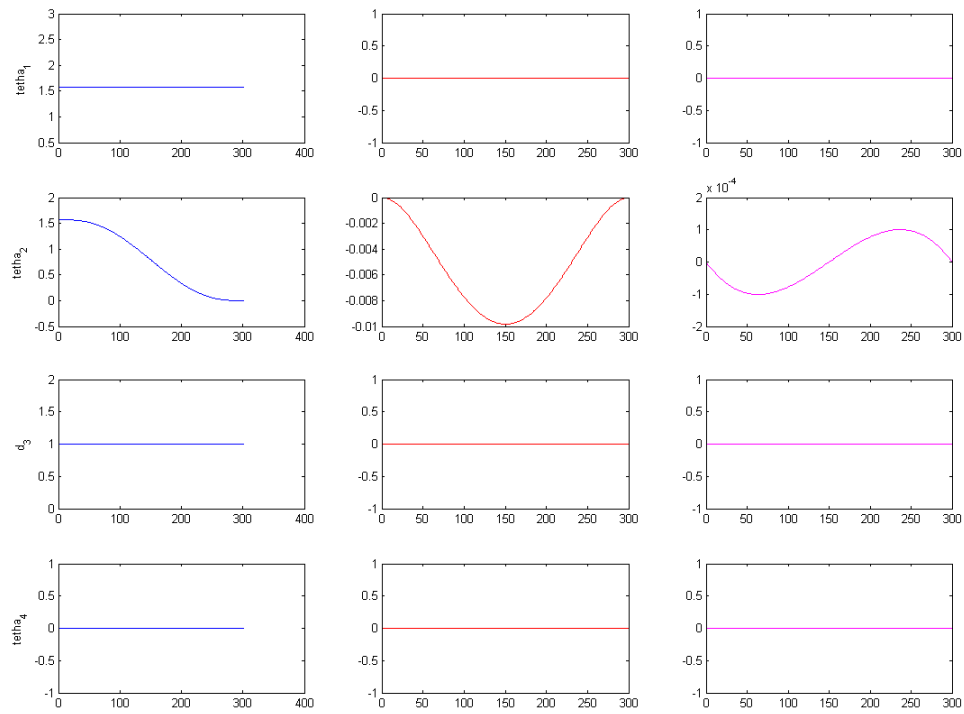


Figura 18: Posizioni, velocità ed accelerazioni dei giunti in qC

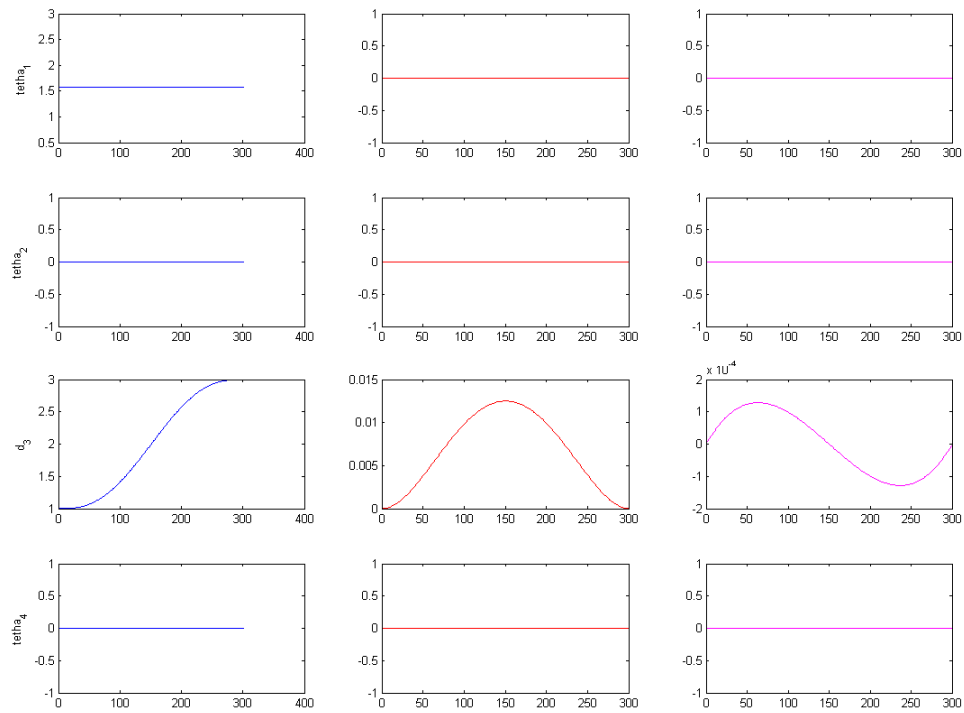


Figura 19: Posizioni, velocità ed accelerazioni dei giunti in qD

Posato il pezzo nel punto stabilito (q_D), viene lanciato il *driver* per lo SCARA (fig. 20)

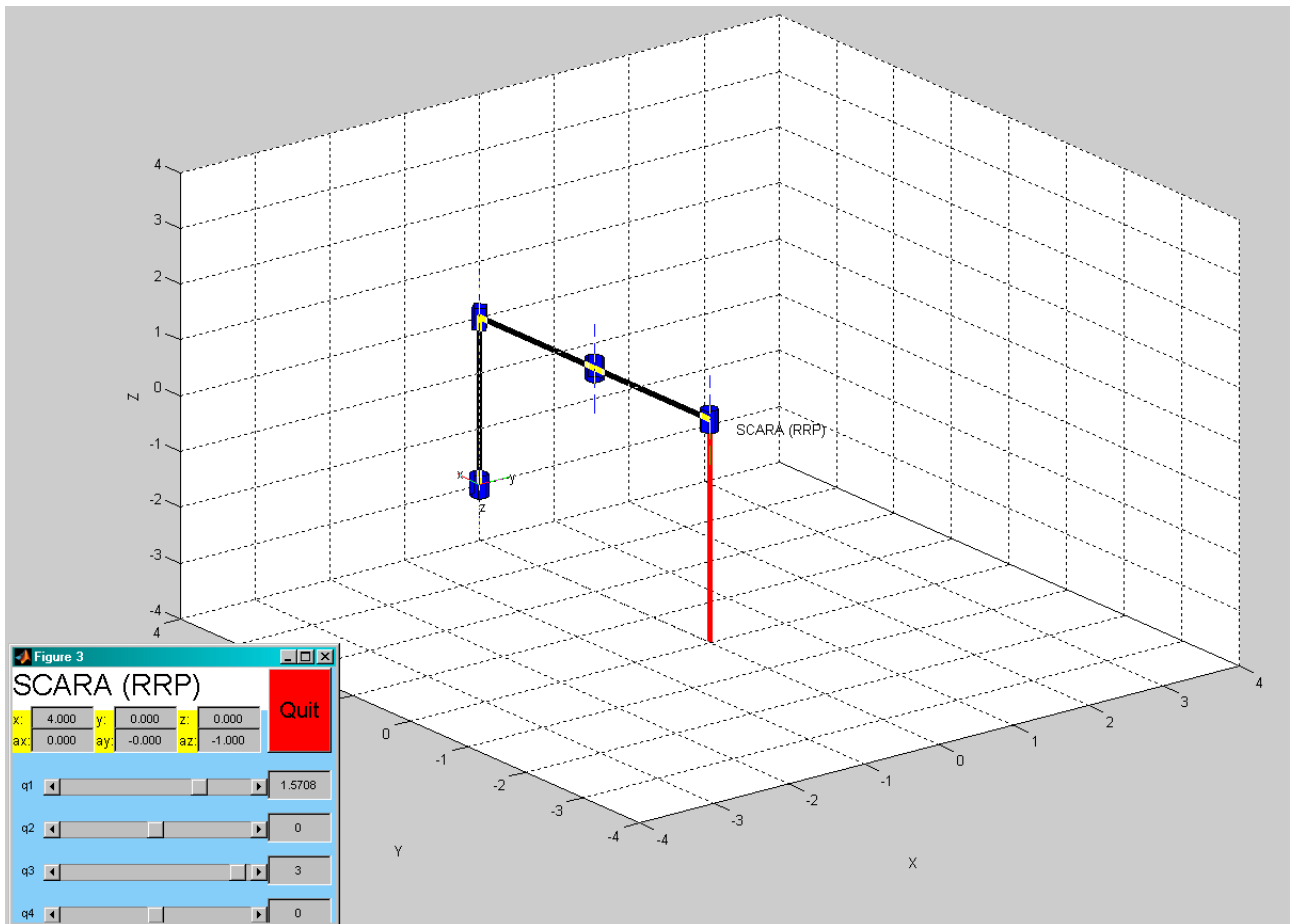


Figura 20: Il driver per il robot SCARA

Applicazioni

Il robot SCARA è utilizzato in molte applicazioni industriali, soprattutto in quelle dove sono richiesti movimenti basilari su di un piano. Ad esempio:

- Dividere o distribuire
- Saldature
- Pick and Place
- Azioni guidate
- Montare componenti (principalmente elettronici)
- Avvitare e svitare

In alcune di queste applicazioni è necessaria la visione guidata. Per questo motivo alcuni robot includono software per l'elaborazione delle immagini, eseguito su un PC. Tali strumenti permettono di migliorare notevolmente l'efficienza delle applicazioni rispetto ai metodi tradizionali. Come esempi di ciò vengono visualizzati quattro scenari in cui viene utilizzata una macchina fotografica con il robot per il lavoro di sviluppo.

Per l'applicazione di fig. 21(a) vi è una fotocamera a fuoco fisso verso il basso. Il robot raccoglie i pezzi messi a caso ordinandoli su un secondo nastro. Nella fig. 21(b) avere una telecamera fissa con messa a fuoco verso l'alto è utile a verificare la corretta posizione e l'orientamento del pezzo prima del posizionamento. Nella fig. 21(c), la fotocamera è collegata al robot in modo da poter controllare dove inserire il pezzo. Infine in fig. 21(d) il robot preleva e sposta i pezzi in un nastro trasportatore in continuo movimento.

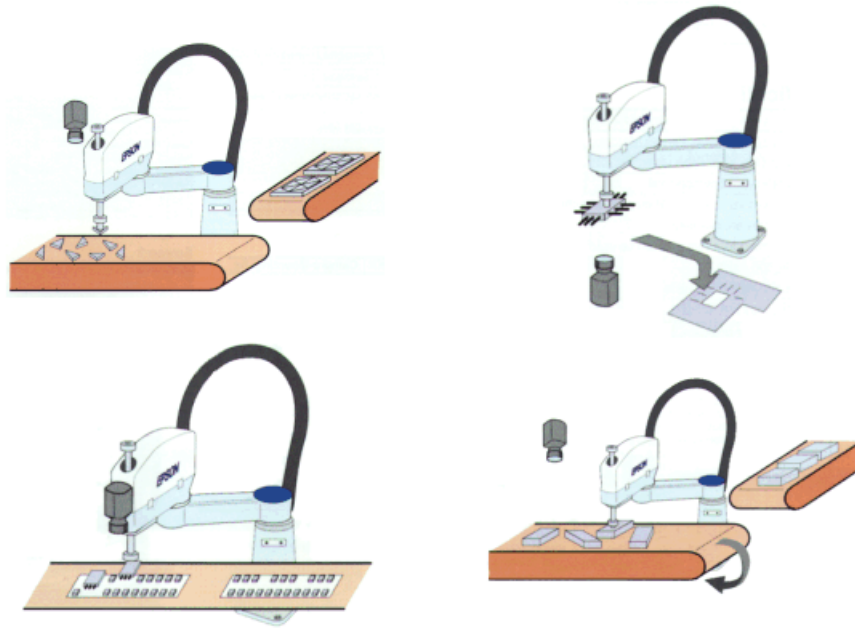


Figura 21: Applicazioni SCARA

Appendice: Il codice MATLAB per lo SCARA

```

%-----
% Universita' degli Studi di Perugia
% Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
% Curriculum 'Automazione e Robotica'
% Tesina Robotica Industriale A.A. 2010/2011          Giulio Spinozzi      Matricola:244191
%                                                    Andrea Prioireschi   Matricola:237025
% Robot SCARA
%-----
% Simulazione, attraverso il 'Robotics Toolbox', del Robot SCARA (RRP+pinza).
% La descrizione completa e tutti i calcoli esatti sono riportati nella
% relazione completa, 'SCARA_Spinozzi_Prioireschi.pdf'
%-----
%

clear all
close all
%%
% Studio della cinematica diretta
%-----
d4=0;
a1=2;
a2=2;

% Creazione dei Link
% link(alfa a theta d sigma)
% sigma specifica se si tratta di un giunto rotoidale (0) o prismatico (1)
clear L
L1=link([0 a1 0 0 0], 'standard');
L2=link([pi a2 0 0 0], 'standard');
L3=link([0 0 0 0 1], 'standard');
L4=link([0 0 0 d4 0], 'standard');

L{1}.m = 15;    % massa del link 1
L{2}.m = 8;    % massa del link 2
L{3}.m = 6;    % massa del link 3
L{4}.m = 0.5;  % massa del link 4

L{1}.r = [ 0 0 0.25 ]; % offset COG link 1
L{2}.r = [ -0.2 0 0 ]; % offset COG link 2
L{3}.r = [ -0.15 0 0 ]; % offset COG link 3
L{4}.r = [ 0 0 -0.25 ]; % offset COG link 4

```

```

%L{i} = [Ixx,Iyy,Izz,Ixy,Iyz,Ixz];
L{1}.I = [0.2, 0.2, 0.04, 0, 0, 0]; %matrice d'inerzia link 1
L{2}.I = [0.1, 0.02, 0.2, 0, 0, 0]; %matrice d'inerzia link 2
L{3}.I = [0.05, 0.01, 0.05, 0, 0, 0]; %matrice d'inerzia link 3
L{4}.I = [0.01, 0.01, 0.0005, 0, 0, 0]; %matrice d'inerzia link 4

% Inerzia (Jm) e rapporto di riduzione (G) del motore di
% attuazione di ciascun giunto del manipolatore
L{1}.Jm = 200e-6;
L{2}.Jm = 200e-6;
L{3}.Jm = 200e-6;
L{4}.Jm = 33e-6;
L{1}.G = -62.6111;
L{2}.G = 107.815;
L{3}.G = -53.7063;
L{4}.G = 76.0364;

% valori dell'attrito viscoso riferiti al motore
% di attuazione del giunto
L{1}.B = 1.48e-3;
L{2}.B = .817e-3;
L{3}.B = 1.38e-3;
L{4}.B = 71.2e-6;

% Creazione dell'oggetto ROBOT
SCARA=robot({L1,L2,L3,L4});
SCARA.name='SCARA (RRP)';

% Variabili simboliche dei giunti
syms th1 th2 d3 th4;
q=[th1 th2 d3 th4];

% Calcolo delle matrice T_04
T_04=fkine(SCARA,q);
T_04=simple(T_04);
T_04=eval(T_04);

% Posizione di riposo (th1 th2 d3 th4)
qRiposo=[0 0 1 0];

%%
% Disegna ROBOT in posizione di riposo
figure('Name','Simulazione robot SCARA')
figure(1)
plot(SCARA,qRiposo)

% Posizione pinza quando il ROBOT e' a riposo
PosPinza0=fkine(SCARA,q);

% Punto A da raggiungere
qA=[pi/2 pi/2 1 0];

% Punto B da raggiungere
qB=[pi/2 pi/2 3 0];

% Punto C da raggiungere
qC=[pi/2 0 1 0];

% Punto C da raggiungere
qD=[pi/2 0 3 0];

% Posizione pinza imponendo il punto A
PosPinzaA=fkine(SCARA,qA);

% Posizione pinza imponendo il punto B
PosPinzaB=fkine(SCARA,qB);

% Generazione della traiettoria nello spazio dei giunti
%-----

% Tempi
% Tempo di campionamento 10ms
Tc=0.01;
% Tempo totale (s)
tempo=3;
% Primo tratto della traiettoria
t1=0:Tc:tempo;

```

```

pause
% POSIZIONAMENTO 1
% Traiettorie nello spazio dei giunti
T_1=jtraj(qRiposo,qA,length(t1));
% Movimento del ROBOT
figure (1)
plot(SCARA,T_1)

% Grafici dei valori comandati ai giunti da
% qRiposo a qA (prima traiettoria)
figure('Name','Posizione, Velocità ed Accelerazione dei giunti')
figure(2)

subplot(4,3,1);plot(T_1(:,1))
ylabel('tetha_1')
subplot(4,3,2);plot(diff(T_1(:,1)),'red')
subplot(4,3,3);plot(diff(diff(T_1(:,1))),'magenta')
subplot(4,3,4);plot(T_1(:,2))
ylabel('tetha_2')
subplot(4,3,5);plot(diff(T_1(:,2)),'red')
subplot(4,3,6);plot(diff(diff(T_1(:,2))),'magenta')
subplot(4,3,7);plot(T_1(:,3))
ylabel('d_3')
subplot(4,3,8);plot(diff(T_1(:,3)),'red')
subplot(4,3,9);plot(diff(diff(T_1(:,3))),'magenta')
subplot(4,3,10);plot(T_1(:,4))
ylabel('tetha_4')
subplot(4,3,11);plot(diff(T_1(:,4)),'red')
subplot(4,3,12);plot(diff(diff(T_1(:,4))),'magenta')

pause

% PICK
T_2=jtraj(qA,qB,length(t1));
figure (1)
plot(SCARA,T_2);

% Grafici dei valori comandati ai giunti da
% qRiposo a qA (prima traiettoria)
figure(2)

subplot(4,3,1);plot(T_2(:,1))
ylabel('tetha_1')
subplot(4,3,2);plot(diff(T_2(:,1)),'red')
subplot(4,3,3);plot(diff(diff(T_2(:,1))),'magenta')
subplot(4,3,4);plot(T_2(:,2))
ylabel('tetha_2')
subplot(4,3,5);plot(diff(T_2(:,2)),'red')
subplot(4,3,6);plot(diff(diff(T_2(:,2))),'magenta')
subplot(4,3,7);plot(T_2(:,3))
ylabel('d_3')
subplot(4,3,8);plot(diff(T_2(:,3)),'red')
subplot(4,3,9);plot(diff(diff(T_2(:,3))),'magenta')
subplot(4,3,10);plot(T_2(:,4))
ylabel('tetha_4')
subplot(4,3,11);plot(diff(T_2(:,4)),'red')
subplot(4,3,12);plot(diff(diff(T_2(:,4))),'magenta')

pause

% POSIZIONAMENTO 2
T_3=jtraj(qB,qA,length(t1));
figure (1)
plot(SCARA,T_3);

% Grafici dei valori comandati ai giunti da
% qRiposo a qA (prima traiettoria)
figure(2)

subplot(4,3,1);plot(T_3(:,1))
ylabel('tetha_1')
subplot(4,3,2);plot(diff(T_3(:,1)),'red')
subplot(4,3,3);plot(diff(diff(T_3(:,1))),'magenta')
subplot(4,3,4);plot(T_3(:,2))
ylabel('tetha_2')
subplot(4,3,5);plot(diff(T_3(:,2)),'red')
subplot(4,3,6);plot(diff(diff(T_3(:,2))),'magenta')

```

```

subplot(4,3,7);plot(T_3(:,3))
ylabel('d_3')
subplot(4,3,8);plot(diff(T_3(:,3)),'red')
subplot(4,3,9);plot(diff(diff(T_3(:,3))),'magenta')
subplot(4,3,10);plot(T_3(:,4))
ylabel('tetha_4')
subplot(4,3,11);plot(diff(T_3(:,4)),'red')
subplot(4,3,12);plot(diff(diff(T_3(:,4))),'magenta')

pause

% POSIZIONAMENTO 3
T_4=jtraj(qA,qC,length(t1));
figure(1)
plot(SCARA,T_4);

% Grafici dei valori comandati ai giunti da
% qRiposo a qA (prima traiettoria)
figure(2)

subplot(4,3,1);plot(T_4(:,1))
ylabel('tetha_1')
subplot(4,3,2);plot(diff(T_4(:,1)),'red')
subplot(4,3,3);plot(diff(diff(T_4(:,1))),'magenta')
subplot(4,3,4);plot(T_4(:,2))
ylabel('tetha_2')
subplot(4,3,5);plot(diff(T_4(:,2)),'red')
subplot(4,3,6);plot(diff(diff(T_4(:,2))),'magenta')
subplot(4,3,7);plot(T_4(:,3))
ylabel('d_3')
subplot(4,3,8);plot(diff(T_4(:,3)),'red')
subplot(4,3,9);plot(diff(diff(T_4(:,3))),'magenta')
subplot(4,3,10);plot(T_4(:,4))
ylabel('tetha_4')
subplot(4,3,11);plot(diff(T_4(:,4)),'red')
subplot(4,3,12);plot(diff(diff(T_4(:,4))),'magenta')

pause

% PLACE
T_5=jtraj(qC,qD,length(t1));
figure(1)
plot(SCARA,T_5);

% Grafici dei valori comandati ai giunti da
% qRiposo a qA (prima traiettoria)
figure(2)

subplot(4,3,1);plot(T_5(:,1))
ylabel('tetha_1')
subplot(4,3,2);plot(diff(T_5(:,1)),'red')
subplot(4,3,3);plot(diff(diff(T_5(:,1))),'magenta')
subplot(4,3,4);plot(T_5(:,2))
ylabel('tetha_2')
subplot(4,3,5);plot(diff(T_5(:,2)),'red')
subplot(4,3,6);plot(diff(diff(T_5(:,2))),'magenta')
subplot(4,3,7);plot(T_5(:,3))
ylabel('d_3')
subplot(4,3,8);plot(diff(T_5(:,3)),'red')
subplot(4,3,9);plot(diff(diff(T_5(:,3))),'magenta')
subplot(4,3,10);plot(T_5(:,4))
ylabel('tetha_4')
subplot(4,3,11);plot(diff(T_5(:,4)),'red')
subplot(4,3,12);plot(diff(diff(T_5(:,4))),'magenta')

pause

%%
% Jacobiani
J_riposo=jacob0(SCARA,qRiposo);
J_0=jacob0(SCARA,q);
J_n=jacobn(SCARA,q);

%%
% Guida il ROBOT variando le variabili di giunto con uno slider
% SCOMMENTARE SOLO SE SI ELIMINANO LE SYMS
drivebot(SCARA);

```

Bibliografia

1. <http://www.sinta.it>
2. http://petercorke.com/Robotics_Toolbox.html
3. <http://www.robots.epson.com/>
4. *Robotica Industriale*, Corso della Laurea Magistrale in Informatica ed Automazione, Antonio Ficola, Perugia A.A. 2010/2011
5. *Robotica: Modellistica, Pianificazione e Controllo*, B. Siciliano, M. Sciavicco, McGraw-Hill, 2008
6. *Modellazione cinematica e pianificazione del movimento per semplici Robot planari e per il Robot planare FARM dell'ENEA di Frascati*, Tesi di Laurea in Ingegneria Informatica, Giulio Feltoni Gurini, Roma Tor Vergata 2004
7. *Robot Dynamics and Control*, M. W. Spong, M. Vidyasagar, Second Edition 2004